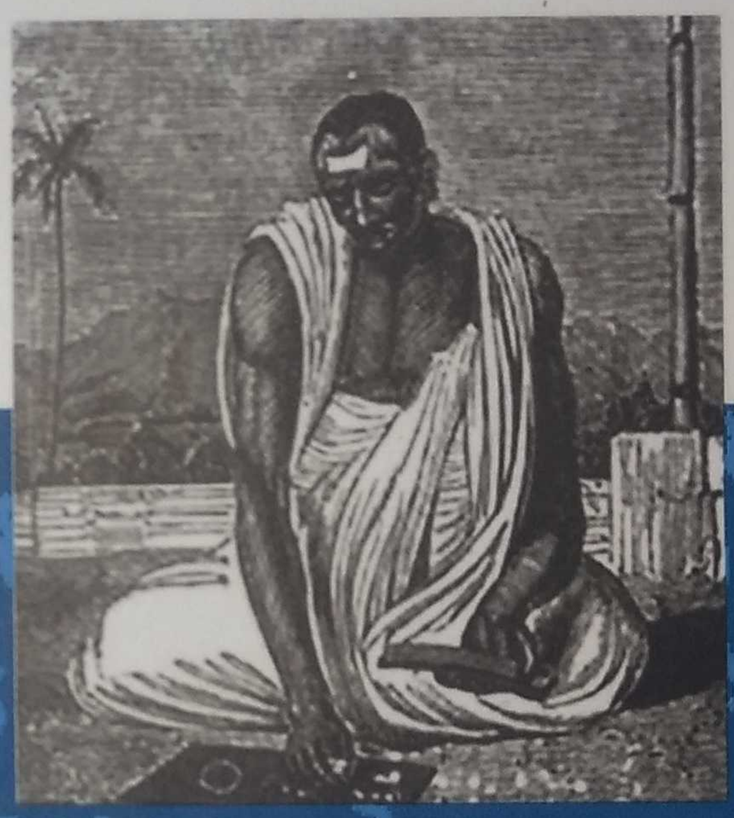
El álgebra
de las estrellas

Brahmagupta



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

GENIOS
de las
MATEMÁTICAS

El álgebra
de las estrellas

Brahmagupta

RBA

© 2016, Iolanda Guevara Casanova y Carles Puig Pla por el texto
© 2017, RBA Coleccionables, S.A.U.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Luz de la Mora
Infografías: Alberto Fregenal
Fotografías: Alamy: 42, 57a; Album: 33, 145; Archivo RBA: 30, 57bi, 57bd, 103, 149a, 149m, 149b; Shutterstock: 113, 123.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor

ISBN (Obra completa): 978-84-473-8775-5
ISBN: 978-84-473-9154-7
Depósito legal: B 23653-2017

Impreso y encuadernado en Cayfosa (Impresia Ibérica)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO 1 Las matemáticas en la India antes del período clásico 15

CAPÍTULO 2 Brahmagupta y su época 37

CAPÍTULO 3 La aritmética y el álgebra 59

CAPÍTULO 4 La geometría y la trigonometría 87

CAPÍTULO 5 La astronomía 109

CAPÍTULO 6 El legado de las matemáticas indias 129

LECTURAS RECOMENDADAS 155

ÍNDICE 157

Introducción

Si se pregunta a una persona occidental de formación media por el nombre de matemáticos destacados en la historia de la humanidad, digamos que anteriores al siglo xx, es de esperar que conocerá algunos personajes, probablemente griegos, como Tales, Pitágoras, Eudoxo, Euclides, Arquímedes, Ptolomeo, Diofanto, Herón o Hipatia; o quizá se refiera a matemáticos europeos muy posteriores como, por ejemplo, Descartes, Fermat, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Gauss, Cauchy o algún otro. Pero si se le inquiere por matemáticos que vivieron en contextos culturales no occidentales, se puede intuir que la respuesta no será tan inmediata. Tal vez nombrará al matemático persa al-Juarismi o algún otro sabio islámico; sin embargo, es muy probable que tenga referencias muy limitadas, por no decir desconocimiento, en relación a matemáticos de culturas milenarias como las desarrolladas en China o la India.

Este desconocimiento seguramente incluye al indio Brahmagupta, el matemático más importante del siglo vii. Y no solo a él, sino también a otros personajes que ejercieron su actividad en el llamado «período clásico» de las matemáticas indias (400-1200), como Aryabhata, Varahamihira, Bhaskara I, Mahavira y Bhaskara II.

El alemán Karl Weierstrass (1815-1897) dijo que «un matemático que no tenga algo de poeta no puede ser un matemático completo». Si damos crédito a sus palabras, los antiguos matemáticos

indios —y entre ellos Brahmagupta— fueron matemáticos completos, pues escribieron sus textos en forma poética, sirviéndose de versos breves y concisos que incluyeron, en ocasiones, sofisticados sistemas de numeración alfanuméricos basados en los fonemas del idioma sánscrito. No es de extrañar, pues, que apareciesen comentaristas posteriores para ayudar a explicar dichos textos a los no iniciados y garantizar la comprensión de los algoritmos y reglas de cálculo que contenían.

Brahmagupta, como es natural, no fue un genio aislado. Vivió en el subcontinente indio, donde se había desarrollado una de las más antiguas civilizaciones de la historia de la humanidad, la del valle del Indo, que en su época de máximo desarrollo (2500-1800 a.C) tuvo conocimientos de geometría básica y fue capaz de realizar cálculos matemáticos, establecer sistemas de medidas y pesos, y fabricar ladrillos de razón estándar entre longitud, anchura y espesor. Estos conocimientos de tecnología y metrología se pondrían de nuevo de manifiesto en la época védica (ca. 1500-500 a.C.), cuando se estructuró la lengua sánscrita, lo que facilitó la expresión y transmisión de los conocimientos matemáticos, sobre todo a través de apéndices (*Kalpasutras* y *Sulbasutras*) de los textos sagrados (*Vedas*). A través de ellos se divulgaron procedimientos geométricos para la construcción de altares rituales de formas sofisticadas. Más tarde, hacia mediados del primer milenio antes de nuestra era, hubo un auge de las matemáticas jainistas (800-200 a.C.), cuyos estudiosos, a diferencia de los sabios védicos, cultivaron las matemáticas por ellas mismas. También hacia la mitad del primer milenio antes de nuestra era tuvo lugar un considerable desarrollo de textos de astronomía escritos en sánscrito, los *siddhantas*. Brahmagupta se ubica dentro de la tradición ligada a los mismos. De hecho, una característica de la astronomía india fue precisamente la continuidad ininterrumpida en la tradición, desde el período védico hasta el período colonial (bajo dominio británico, iniciado en el siglo XIX).

Aunque se conoce muy poco de la vida de Brahmagupta, se sabe que tuvo conocimiento de los trabajos de matemáticos griegos como Herón de Alejandría, Ptolomeo o Diofanto, y que consultó las obras de sabios indios anteriores a él, en particular las de Aryabhata (siglo V-VI) y Vaharamihira (siglo VI).

En el desarrollo de la astronomía matemática india («astronomía siddhántica») destacó Aryabhata, autor del *Aryabhatiya*, el *siddhanta* más antiguo preservado en su totalidad; esta obra incluye un capítulo entero dedicado a las matemáticas y contiene, entre otras contribuciones, una buena aproximación de π, el cálculo de las «medias cuerdas» (o senos), la resolución de ecuaciones algebraicas por el método de inversión y el método de la *kuttaka* o «pulverizador» para resolver ecuaciones diofánticas de primer orden.

Aryabhata tuvo mucha influencia en los textos de astronomía y matemática posteriores, y de manera particular en la obra de Brahmagupta, quien hizo referencia a sus trabajos y también los criticó.

En cuanto a Brahmagupta, sus principales aportaciones se encuentran en los dos tratados que legó a la posteridad. El primero, *Brahma-sphuta-siddhanta*, fue escrito cuando era un joven de 30 años y está considerada como su obra maestra; el segundo, *Khanda-khadyaka*, es un manual de astronomía matemática compuesto mucho tiempo más tarde, a la edad de 67 años.

En el *Brahma-sphuta-siddhanta*, Brahmagupta desarrolló la aritmética de los números positivos, negativos y el cero. La suya es la primera explicación que ha llegado hasta nuestros días, conservada en un texto, de las reglas operativas entre dichos números. Gracias a estas reglas pudo avanzar en los métodos de resolución de ecuaciones indeterminadas de segundo grado; es el primer texto del que se tiene constancia en que un autor trabaja con diversas incógnitas de segundo grado en una misma ecuación, abordando de una forma particular la que se conoce actualmente como ecuación de Pell, en referencia al matemático inglés John Pell (1610-1685). Y al sabio indio se debe también la llamada «fórmula de Brahmagupta», para hallar el área de cualquier cuadrilátero cíclico dadas las longitudes de sus lados.

Brahmagupta continuó estudiando los cuadriláteros y estableció una regla para determinar en qué condiciones las diagonales de un cuadrilátero cíclico eran, además, perpendiculares, el hoy conocido como «Teorema de Brahmagupta». Este alto interés por los cuadriláteros está muy relacionado con el papel que juegan en problemas astronómicos.

Muy relacionada con la astronomía, la trigonometría fue otra disciplina matemática en la que también destacó Brahmagupta. En el *Brahma-sphuta-siddhanta* mejoró las tablas de los veinticuatro valores de senos de Aryabhata y en el *Khanda-khadyaka* introdujo un método para interpolar los senos de los ángulos intermedios, que se puede considerar como un caso particular de la fórmula para segundo orden establecida por los matemáticos británicos Isaac Newton (1643-1627) y James Stirling (1692-1770).

Hacia el siglo v tuvo lugar una diferenciación entre escuelas o *paksas* dentro de la astronomía siddhántica india. Uno de los motivos fue el desacuerdo entre los parámetros utilizados para establecer las divisiones del tiempo y los ciclos celestes, así como el intento de armonizar los cálculos astronómicos y las tradiciones de los textos sagrados del hinduismo. Brahmagupta se manifestó seguidor de la *Brahma-paksa* y, sobre todo en su juventud, criticó vehementemente a Aryabhata por haberse desviado de los textos sagrados y por el supuesto desconocimiento que tenía de los movimientos medios planetarios.

Al margen de estas discrepancias, Brahmagupta mejoró los cálculos de las longitudes verdaderas de los planetas y obtuvo, gracias a sus conocimientos matemáticos, mejores resultados que sus predecesores. Fue un experto observador y se basó estrictamente en las observaciones; en base a ellas, introdujo correcciones útiles en diversos cálculos astronómicos (eclipses lunares y solares, paralaje anual de Marte, conjunción de planetas, etc.). Fue probablemente el primer astrónomo que empleó la teoría de las ecuaciones cuadráticas y el método de aproximaciones sucesivas a la resolución de problemas en la astronomía esférica.

Tras la muerte de Brahmagupta, sus contribuciones y, en general, las de la matemática india, tuvieron una difusión desigual en Oriente Medio, en China, en la propia India o en el mundo islámico. En el siglo VIII, el astrónomo indio Gautama Siddha introdujo en la China de la dinastía Tang el método indio de cálculos astronómicos y confección de calendarios, derivado de textos de Varahamihira y Brahmagupta.

En la propia India, diversos matemáticos, en particular Mahavira (siglo IX) y Bhaskara II (siglo XII) entendieron, usaron y desarrollaron buena parte de las aportaciones de Brahmagupta, cuya fama debió de ser considerable, ya que, al parecer, su *Brahma-sphuta-siddhanta* fue el primer tratado matemático indio traducido al árabe; ocurrió por orden de Al-Mansur (ca. 714-775), califa de Damasco.

Las traducciones del sánscrito hicieron que los árabes se familiarizaran por primera vez con un sistema científico astronómico, antes de su contacto con la astronomía griega. Sin embargo, aunque inicialmente imitaran la práctica india de escribir tratados astronómicos en verso (hoy perdidos), la influencia de la astronomía siddhántica fue desplazada por los textos astronómicos y matemáticos helenísticos, escritos en prosa.

Al-Biruni, el erudito persa de los siglos X y XI, también vertió varios textos del sáncrito al árabe y quiso traducir el *Brahma-sphuta-siddhanta*; no pudo acabar la tarea, pero proporcionó una tabla con sus contenidos.

Durante mucho tiempo, los eruditos occidentales pensaron que los indios no habían hecho ninguna obra original hasta el tiempo de Bhaskara II. El historiador de la matemática de origen suizo Florian Cajori (1859-1930) se lamentaba del desconocimiento de los europeos en relación a las contribuciones de la matemática india: «desafortunadamente algunos de los más brillantes resultados del análisis indeterminado de los trabajos hindúes llegaron a Europa demasiado tarde para ejercer la influencia que habrían ejercido si hubieran llegado dos o tres siglos antes». Pero lo que sí llegó a Europa fue el sistema de numeración decimal posicional indoarábigo, que dio lugar a las actuales cifras. Fue el comerciante italiano Leonardo de Pisa (Fibonacci. 1175-ca. 1250), que de niño conoció en Bugía (Argelia) los símbolos de los indios y sus reglas para las operaciones, el encargado de introducir en Occidente la aritmética árabe y los símbolos indoarábigos con su obra *Liber Abaci* (1202). Así, las matemáticas indias supusieron una aportación esencial para el desarrollo de la ciencia universal.

476 Nace el astrónomo y matemático Aryabhata, probablemente en Kusumapura (la actual Patna, capital del estado de Bihar), India.

476-495 Reinado de Budhagupta en Pataliputra, capital del Imperio gupta, que se convierte en un importante centro cultural.

499 Aryabhata escribe el *Aryabhatiya*, su obra maestra, un compendio de astronomía y matemáticas.

ca. 505 Nace el astrónomo y matemático Vaharamihira.

ca. 550 Muere Aryabhata.

575 Varahamihira escribe el *Panchasiddhantika*.

587 Muere Varahamihira.

598 El astrónomo y matemático Brahmagupta nace en Bhillamala (Bhinmal), en el Rajastán, al noroeste de la India.

ca. 600 Nace el astrónomo y matemático Bhaskara I, posiblemente en Saurastra, estado de Gujarat, India.

ca. 610-620 Brahmagupta recibe una formación hinduista ortodoxa.

ca. 620-627 Brahmagupta accede a textos científicos griegos, así como a los escritos de Aryabhata y Varahamihira. Se adhiere a la escuela astronómica *Brahma-paksa*.

628 Brahmagupta redacta su obra maestra, *Brahma-sphuta-siddhanta*.

629 Bhaskara I escribe *Aryabhatiyabhasya*, el comentario sobre el *Aryabhatiya* de Aryabhata.

ca. 630 Brahmagupta comienza a ejercer su actividad científica en Ujjain y dirige el observatorio astronómico local.

665 Brahmagupta escribe un manual astronómico, el *Khanda-khadyaka*.

ca. 668-670 Probable muerte de Brahmagupta.

ca. 680 Muere Bhaskara I.

ca. 800 Nace el matemático Mahavira (o Mahaviracharya), posiblemente en Mysore, India.

850 Mahavira escribe el *Ganita-sara-sangraha* (*Compendio de la esencia de la matemática*), el primer tratado matemático independiente de la astronomía escrito en sánscrito que se conserva íntegro.

ca. 870 Muere Mahavira.

1114 Nace el matemático Bhaskara II (o Bhaskaracharya) en Bijapur (o Vijayapura), India.

ca. 1140 Bhaskara II escribe el *Lilavati*, tratado de aritmética donde muestra un amplio conocimiento de las obras de matemáticos indios anteriores.

1185 Bhaskara II muere en Ujjain.

CAPÍTULO 1

Las matemáticas en la India antes del período clásico

Brahmagupta vivió en la India en el siglo VII. Su pensamiento matemático se enmarca en una larga tradición, cuyos primeros vestigios se encuentran en la cultura de Harappa y que tuvo continuidad con los textos sagrados de los indoarios (*Vedas*), en particular los *sulbasutras*, así como con la cosmología jainista y las obras de astronomía matemática de los *siddhantas*.

Se denominan genéricamente «matemáticas indias» o «matemáticas de la antigua India» a las que se desarrollaron en todo el ámbito del Indostán, que incluye la actual República de la India, la República Federal Democrática de Nepal, la República Islámica de Pakistán, la República Popular de Bangladesh y la República Socialista Democrática de Sri Lanka.

En el noroeste del subcontinente indio y a lo largo del fértil valle del Indo se desarrolló una cultura cuyos orígenes se remontan hacia el 6000 a.C. Esta civilización llegó a su máximo desarrollo entre 2500 y 1800 a.C. Las primeras excavaciones, efectuadas en la década de 1920, fueron las de Harappa, de donde proviene la denominación «cultura de Harappa o civilización de Harappa». La segunda gran ciudad, Mohenjo-Daro, fue excavada a mediados de la década de 1920. A partir de entonces se pudieron conocer los logros alcanzados durante este primer período, incluidos los conocimientos matemáticos.

Un segundo período en la historia del subcontinente indio corresponde a la época védica. Aunque no hay consenso sobre fechas entre los estudiosos se piensa que, hacia 1500 a.C., una migración humana procedente del norte llegó al valle del Indo y destruyó la cultura Harappa, si bien asimiló algunas de sus características. A estos invasores se les llama frecuentemente «arios», palabra que deriva del sánscrito *ayra*, y no debe confundirse con

el significado atribuido al mismo término por los nazis en el siglo XX. Se trataba de un pueblo de pastores y nómadas que hablaban una lengua de la familia indoeuropea, el sánscrito. Con el paso de los años, esta lengua fue evolucionando y permitió la transmisión del discurso religioso en los *Vedas* (libros sagrados), que incluía prácticas de contenido matemático.

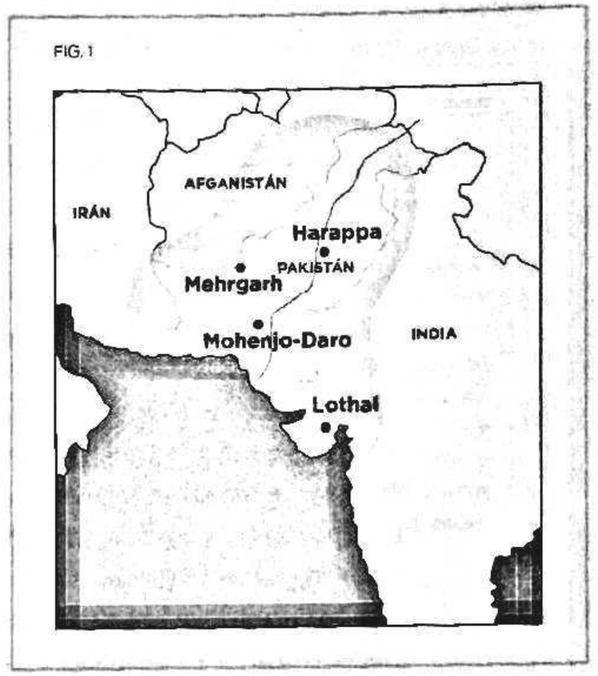
Un tercer período corresponde a las matemáticas desarrolladas en el marco del jainismo —una religión que negaba la autoridad de los libros sagrados y aspiraba a liberar el alma de su prisión corpórea— y se sitúa entre 800 y 200 a.C. Hacia mediados del primer milenio a.C. se difundieron con fuerza el jainismo y el budismo, en detrimento de las prácticas religiosas védicas. Como consecuencia, las matemáticas se empezaron a desarrollar como disciplina propia y ampliaron sus temas de estudio más allá de los procedimientos geométricos característicos de la época anterior, que se aplicaron a la construcción de los altares védicos.

Finalmente, llegamos a la llamada «edad dorada» de las matemáticas indias, así como de la cultura sánscrita. Se trata de la etapa conocida como «período clásico» (400-1200). En él encontramos a Brahmagupta y a sus antecedentes directos.

PRIMEROS VESTIGIOS DE ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL VALLE DEL INDO

Los yacimientos arqueológicos de Harappa, Mohenjo-Daro, Lothal y otros muestran una sociedad organizada y jerarquizada que destacó por su elevado grado de urbanización. Dicha sociedad planificó y erigió ciudades con edificios de ladrillo, utilizó sistemas de drenaje y alcantarillado subterráneo, construyó sofisticadas infraestructuras para la conservación de agua —con canales y embalses (como en Dholavira)— y contó con sistemas de medición sorprendentemente uniformes. La ciudad de Lothal, en la desembocadura del Indo, fue un importante centro portuario, por el que transitaba una considerable diversidad de mercancías y que llegó a comerciar con la cultura mesopotámica. Fueron, posiblemente,

los intercambios comerciales de esta civilización los que dieron lugar al establecimiento de un sistema de medidas comunes de longitud y de peso.



Localización de algunos yacimientos de la civilización del valle del Indo.

MEDIDAS DE LA CULTURA HARAPPA

En Mohenjo-Daro, Harappa y Lothal se han descubierto escalas e instrumentos para medir longitudes. La longitud patrón de Mohenjo-Daro es un fragmento de concha de 66,2 mm de longitud dividida en diez partes iguales por nueve líneas paralelas a una distancia media de 6,7 mm. Dos de las líneas están señaladas de forma diferente, siendo la distancia entre ellas de 33,5 mm. A esta unidad se la denomina «pulgada del Indo».

La pulgada del Indo ha sido comparada con otra unidad de longitud, el *sushi* sumerio, del cual es exactamente el doble, siendo este un argumento que, junto con otras evidencias, permite afirmar que hubo contactos entre las dos culturas.

La cultura Harappa también utilizó un sistema estandarizado de pesos basados en las proporciones: 1/20, 1/10, 1/5, 1/2, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 y 500. En las excavaciones de Lothal se ha hallado gran cantidad de pesos en forma de hexaedros. De estas piezas cúbicas, la más frecuente es la que corresponde a un valor de alrededor de 27,6 gramos. Si se toma esta como unidad, se encuentran pesos que corresponden a 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 2; 5; 10; 20; 50; 100; 200 y 500 de la misma. También fabricaron pesos con otras formas geométricas regulares, como barriles, conos o cilindros.

El hecho de tener un sistema estandarizado de pesos y medidas pone en evidencia el uso de una matemática práctica, y muestra la utilización de cálculos matemáticos y el conocimiento de nociones de geometría básica.

FABRICACIÓN DE LADRILLO

Por otro lado, el uso de ladrillos de barro cocidos en horno y una avanzada tecnología para fabricarlos fue una característica relevante de la cultura Harappa. Aunque se han identificado hasta quince tamaños distintos de este material constructivo, la razón estándar de las tres dimensiones —longitud, anchura y espesor— es siempre 4:2:1. Hoy en día se sigue considerando que esta es la proporción óptima para construir un muro de ladrillos de una forma eficaz. Se han estudiado ladrillos de Harappa, Mohenjo-Daro y Lothal, y se ha comprobado que ciertos ladrillos de tamaños distintos tienen dimensiones que son múltiplos enteros de las respectivas unidades de longitud encontradas en cada ciudad. Esta relación entre las dimensiones de los ladrillos y las unidades de longitud, entre tecnología y metrología, volverá a encontrarse 1500 años después, durante el período védico, en la construcción de altares.

LA ÉPOCA VÉDICA Y LOS *SULBASUTRAS*

La época védica se inicia con la llegada de los arios, procedentes del norte. Estos nuevos habitantes hablaban una lengua de la familia indoeuropea, el sánscrito. La lengua sánscrita se desarrolló y estructuró a partir de la obra *Ashtadhyayi*, escrita por el gramático Panini hace unos 2500 años. Este texto estableció los estándares lingüísticos para el sánscrito clásico, a partir de unos 4000 *sutras* (reglas expresadas en forma de aforismos), de manera que el idioma se mantuvo casi igual durante veinte siglos. Esta estructuración tuvo consecuencias importantes para el desarrollo de las matemáticas en la India, porque las características propias del sánscrito facilitaron la expresión de los razonamientos matemáticos. Algunos estudiosos incluso sostienen que el carácter algebraico de las matemáticas de la antigua India se deriva de la tradición lingüística de representar los números mediante palabras.

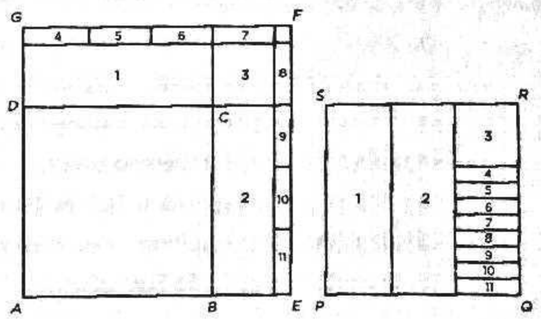
Los *Vedas*, los textos sagrados más antiguos de los indoarios, se estudian distribuidos en cuatro épocas de dataciones aproxima-

CÁLCULO DE RAÍCES CUADRADAS APROXIMADAS EN LOS *SULBASUTRAS*

Los *Sulbasutras* de Apastamba y Katyayana contenían algoritmos de cálculo necesarios para las construcciones de los altares de los ritos védicos. Así, por ejemplo, para construir un altar cuadrado que tuviese de área el doble de la de otro altar cuadrado dado, se requería algún método para calcular la raíz cuadrada de 2. Los textos en forma de *sutras* se caracterizaban por ser cortos y precisos, pero no justificaban el procedimiento expuesto. Fueron los matemáticos e historiadores del siglo xx los que interpretaron los textos antiguos y dieron posibles explicaciones para justificar los algoritmos utilizados. En los *sulbasutras* de Apastamba y Katyayana, las indicaciones para calcular una raíz cuadrada son: «Auméntese la medida en su tercera parte y esta tercera parte en su propia cuarta parte menos la trigesimocuarta parte de esa cuarta parte. Este es el valor con una cantidad especial en exceso». Así, por ejemplo, para hallar la raíz de 2, sería,

$$\sqrt{2} \approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{(3)(4)}-\frac{1}{(3)(4)(34)} = 1{,}4142156\ldots,$$

cuyo valor real es 1,4142135... Un historiador de la matemática india, Bibhutibhushan Datta (1888–1958), dio en 1932 una posible explicación. Consideró el cuadrado *ABCD* y el *PQRS*, cada uno de lado la unidad y por tanto de área 1. El problema consiste en fusionar los dos cuadrados en un nuevo cuadrado cuya área será la suma de las dos (igual a 2), y que tendrá de lado una longitud igual a la raíz de 2. El procedimiento consistiría, según Datta, en ampliar el cuadrado *ABCD* con «trozos» de *PQRS*. Así pues, se trata de «recortar» el segundo cuadrado, hasta formar con esos recortes la ampliación que necesita *ABCD* para tener área 2. Se divide el cuadrado *PQRS* en tres tiras rectangulares iguales (1/3 de la aproximación). Se numeran dos con el 1 y el 2. Luego la tercera tira se subdivide en tres cuadrados. El primer cuadrado se numera con un 3, los dos restantes se dividen en cuatro tiras iguales (1/(3)(4) = 1/12 de la aproximación) que se numeran de 4 a 11. Estas once piezas se colocan alrededor del cuadrado *ABCD*, tal como se ve en la figura.



Método de la ampliación de un cuadrado, según las instrucciones de Bibhutibhushan Datta.

das. Los *Samhitas* (ca. 1000 a.C.), los *Brahamanas* (ca. 800 a.C.), los *Aranyakas* (ca. 700 a.C.) y los *Upanishads* (ca. 600-500 a.C.).

Los *Brahamanas*, la segunda gran división de la literatura védica, eran manuales prácticos escritos por y para los brahamanes, los sacerdotes que realizaban los sacrificios y los ritos sagrados. Estos individuos vivían en comunidades itinerantes que se dispersaron desde el norte hacia el este y el sur, y que debido a esta dispersión necesitaban tener por escrito sus procedimientos rituales y sus obligaciones, para que no se perdieran.

LAS MATEMÁTICAS VÉDICAS

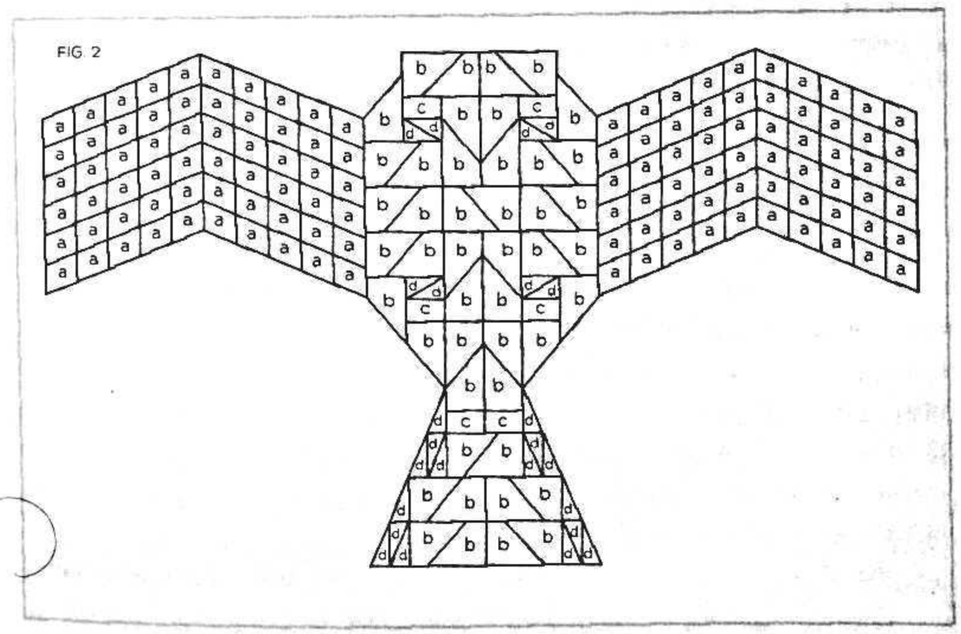
Una fuente importante para estudiar las matemáticas védicas son los *vedangas*, esto es, los apéndices de los *Vedas*. Estos apéndices se clasificaron en seis ramas del conocimiento: la fonética, que da indicaciones para articular y pronunciar los ritos sagrados; la gramática, que trata sobre cómo escribir; la etimología, que investiga el origen de las palabras; la metronomía, dedicada al estudio de la métrica y los versos; la astronomía, enfocada a seleccionar las fechas adecuadas para realizar los ritos y orientar bien los altares y los rezos y, finalmente, las reglas de los rituales y ceremonias (*kalpa*). En los dos últimos es donde se concentran las fuentes más importantes de las matemáticas del período védico. Los datos están en forma de *sutras*, un tipo de escritura breve, frecuentemente en estilo poético para captar la esencia de una argumentación o resultado. Se evitan los verbos y los nombres compuestos largos para facilitar la memorización y el ahorro de material escrito. La escritura en forma de *sutras* ayudó a que se preservasen los contenidos de los *Brahamanas*.

Los *kalpasutras*, las reglas de los rituales y ceremonias, incluían los *sulbasutras*, los textos que se refieren a las medidas para la construcción de los altares, En origen, el término *sulba* designaba las reglas que gobernaban los ritos de los sacrificios, pero más tarde se usó solamente como la manera de designar la soga para medir los altares. La mayor parte de lo que se conoce de la geometría védica proviene de estos *sutras*.

Los *sulbasutras* proporcionaban instrucciones para dos tipos de ritos, los domésticos y los comunitarios. Para los primeros, los altares podían ser cuadrados o circulares, pero para los ritos públicos hacían faltan altares más elaborados, de formas compuestas por rectángulos, triángulos y trapecios que generaban figuras realistas, por ejemplo un halcón justo en el momento de emprender el vuelo. La creencia era que, en un altar así, el alma del orante sería llevada por un halcón directamente a los cielos.

Baudhayana (ca. 800 a.C.) y Apastamba (ca. 600 a.C.) fueron los autores de los dos *sulbasutras* más importantes desde el punto de vista de las matemáticas. Otros dos autores fueron Manava (ca. 750 a.C.) y Katyayana (ca. 200 a.C.). Se establecen estas fechas por el estilo de escritura que permite asegurar que, excepto Katyayana, los otros tres son anteriores al gramático del sánscrito Panini, ya citado.

Se conoce poco de los autores o *sulbakaras*. Parece ser que eran escribas, pero también sacerdotes artesanos, es decir, los que construían los *vedis* (altares para los sacrificios), mantenían los *agni* (fuegos sagrados) e instruían a los fieles en la elección de los sacrificios y los altares. Es difícil datar los textos citados con anterioridad.



Altar con la imagen del halcón compuesto de ladrillos de diversas formas.

El *sulbasutra* de Baudhayana tiene tres capítulos. Incluye una formulación general del teorema del sabio griego Pitágoras (ca. 569-ca. 475 a.C.), según el cual, en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa; un procedimiento para calcular la raíz cuadrada de 2 de forma aproximada hasta la quinta cifra decimal, y diversas construcciones geométricas, entre ellas algunas para cuadrar el círculo (de manera aproximada) y otras para conseguir formas cuyas áreas sean iguales a sumas o diferencias de otras formas más elementales.

El texto de Apastamba tiene seis capítulos y trata de los mismos temas que el de Baudhayana, pero con más detalle. Los de Manava y Katyayana son del mismo estilo y no aportan mucho más.

Los textos de los *sulbasutras* surgieron por la necesidad de recoger por escrito la orientación, la forma y el área de los altares, según estaba escrito en los libros sagrados védicos. Para la orientación desarrollaron la astronomía, y para las formas y las áreas la geometría. Eran manuales prácticos con instrucciones concretas que llevaban implícitos resultados y teoremas geométricos que ya no se cuestionaban. Entre otras operaciones, se describe la construcción de un altar con una forma determinada; la fusión de dos cuadrados para construir un cuadrado de área suma de los dos anteriores; la transformación de un rectángulo en un cuadrado de la misma área, o la conversión de un círculo en un cuadrado de la misma área o viceversa (de forma aproximada).

De hecho, no se sabe con certeza si los antiguos babilónicos obtuvieron el teorema de Pitágoras de la India o si procede de una tercera fuente, tal vez de los sumerios (ca. 1700 a.C.).

Los *sulbasutras* también contenían algoritmos de cálculo, necesarios para las construcciones; por ejemplo, el cálculo de la raíz cuadrada de 2, procedimiento requerido para construir un altar cuadrado que tuviese de área el doble que la de un altar cuadrado dado. De la misma manera que los procedimientos de construcción geométrica no se justificaban, los métodos de cálculo aproximados de raíces tampoco, si bien debe decirse que conseguían aproximaciones exactas hasta el quinto decimal.

Es interesante destacar que estas construcciones, así como los cálculos geométricos relacionados con la construcción de altares recuerdan, en cierto modo, los que se conocen como «los tres problemas clásicos de la geometría griega»: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. También el cálculo de la raíz de 2 evoca la idea de los inconmensurables de los griegos clásicos, la imposibilidad de expresar una cantidad (2) y su raíz en términos de medidas comparables. Ser comparable significaba ser proporcional, lo que es una manera de reconocer que no se puede expresar la raíz de 2 en forma de fracción (cociente de números enteros).

LOS NÚMEROS Y SUS GRAFÍAS

La descripción de la matemática védica quedaría incompleta sin incluir una breve explicación relativa a la grafía de los símbolos utilizados para escribir los números, y también a la base utilizada. Se han encontrado números en *Kharosthi*, un alfasilabario que se usó para escribir el sánscrito entre los siglos III a.C. y III d.C., grabados en inscripciones de esta época. Los números hasta el cien se formaban aditivamente; para números mayores funcionaba el principio de la multiplicación, con símbolos especiales para las potencias superiores. Desde el período Harappa, el número diez constituía la base de la numeración; no existen pruebas de que hayan utilizado otra base en la literatura sánscrita.

En varias fuentes antiguas se encuentra una larga lista de nombres de números para potencias de diez. Por ejemplo, uno de los cuatro *Vedas* principales, el *Yajurveda*, da nombres especiales a diferentes potencias de diez, por ejemplo, 1 es *eka* y 10^{12} es *parardha*. En el *Ramayana*, uno de los textos más populares del hinduismo y aproximadamente contemporáneo de los *Vedas* posteriores, se cuenta que Rávana, rey de los demonios *raksasas* de la mitología hinduista, mandaba un ejército de $10^{12} + 10^5 + 36(10^4)$ miembros. Por otro lado, el ejército de Rama, el héroe de la epopeya, tenía $10^{10} + 10^{14} + 10^{20} + 10^{24} + 10^{30} + 10^{34} + 10^{40} + 10^{44} + 10^{52} + + 10^{57} + 10^{62} + 5$ hombres. Aunque todos estos números sean fantásticos, la existencia de nombres para todas las potencias de diez entre 10 y 62, indica que los indios védicos estaban familiarizados

con números muy grandes. Los antiguos griegos no tenían palabras para indicar números mayores que 10^4 (miríada).

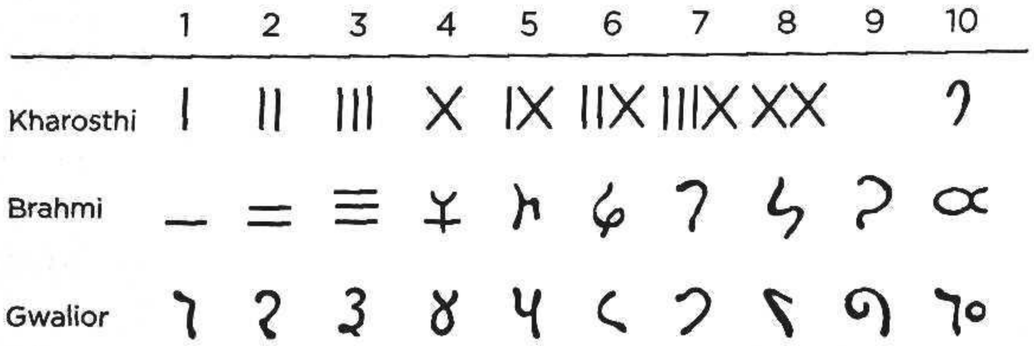
El uso de grandes números se consolidó dando nombres a las potencias de diez. Después, el uso de palabras y números dio lugar a una notación alfabética asentada en los múltiplos de diez. Así, 60 799 se lee como *sastim* (60) *sahara* (mil) *sapta* (siete) *satani* (cientos) *navatim* (nueve veces diez) *nava* (nueve).

Los numerales de la escritura *Kharosthi* (siglos III a.C.-III d.C.) y los de la escritura *Brahmi* (siglo III a.C.) eran decimales y aditivos. Con el tiempo evolucionaron hacia una escritura decimal posicional, esto es, una escritura en la que los símbolos utilizados cambian de valor de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, según el lugar que ocupan. Los nuevos sistemas numéricos fueron el *Bakhshali* (ca. 200-400) y posteriormente el *Gwalior* (ca. 850), notablemente cercano a nuestro actual sistema numérico.

A pesar de esta evolución en la escritura de los números mediante símbolos especiales para los números del uno al nueve, las palabras numéricas se continuaron utilizando, incluso palabras distintas para expresar un mismo número, que se elegían para jugar con la expresión en forma de verso de los resultados matemáticos. Hemos de tener en cuenta que estas reglas se daban en forma de *sutras*, escritura breve en estilo poético. Para captar la

Tres tipos de números indios en escrituras distintas ordenadas cronológicamente

FIG. 3



El número 9 en *Kharosthi* no se conoce con certeza.

esencia de una argumentación o resultado, los *sutras* evitaban verbos y nombres compuestos largos para facilitar la memorización y el ahorro de material escrito. Así, el uno podía ser *rupa* (Luna), ya que solo hay una Luna, o *bhumi* (Tierra) por la misma razón; el dos podía ser *yama* (dos veces) o *kara* (manos), ya que los humanos tienen dos manos.

> «Es la India la que nos dio el método ingenioso de expresar todos los números por medio de diez símbolos, recibiendo cada símbolo un valor posicional así como un valor absoluto.»
>
> — PIERRE-SIMON LAPLACE (1749-1827).

Desde mediados del siglo XX, la expresión «matemática védica» tiene un significado añadido, debido a la obra *Matemáticas védicas* (1965) de Swami Bharati Krishna Tirthaji (1884-1960). El autor de este tratado nació en Tinnevely, una ciudad india próxima a Madrás. Estudió en su ciudad natal y en Madrás. A los diecinueve años aprobó un examen para ingresar en Bombay como alumno externo de un *College* estadounidense con sede central en Nueva York. Allí estudió sánscrito, filosofía, matemáticas e historia. En 1911 dejó su trabajo como profesor universitario en Bombay y se inició en una orden religiosa hindú, de la que llegó a ser superior en 1925. Su fama se debe a las ya citadas *Matemáticas védicas*, obra en la que, según el mismo explicó, reconstruyó dieciséis *sutras* (reglas breves) y trece subsutras (corolarios) a partir de un *parisista* (ápendice) del *Atharvaveda*, uno de los cuatro *Vedas* más antiguos. Nadie ha podido localizar tal apéndice, pero su obra ha creado escuela y, hoy en día, existen centros dedicados a la enseñanza de las matemáticas védicas en todos los rincones del mundo.

MATEMÁTICAS JAINISTAS

Hacia mediados del I milenio a.C. se registró el auge del budismo y el jainismo, en detrimento de las prácticas religiosas védicas.

Como consecuencia de ello disminuyó la construcción de altares, asociada a procedimientos geométricos. Las matemáticas pasaron a ser una disciplina abstracta y autónoma.

Los textos jainistas están todavía poco estudiados, desde el punto de vista de las matemáticas, y lo que se conoce de ellos a veces procede de comentarios posteriores. De entre las obras antiguas de su literatura canónica merece especial atención —por lo que respecta a las matemáticas— el *Sthananga Sutra* (ca. siglo II a.C.), porque da una lista de los temas matemáticos estudiados en la época: la teoría de números, las operaciones aritméticas, la geometría, las operaciones con fracciones, las ecuaciones simples, las ecuaciones cúbicas, las bicuadráticas (cuárticas), las permutaciones y las combinaciones. Esta clasificación jainista fue seguida en los textos matemáticos posteriores.

ATISBANDO EL INFINITO

Las ideas sobre el infinito matemático en las matemáticas jainistas eran muy interesantes y evolucionaron conforme lo hacían las ideas cosmológicas de esta religión. Según la cosmología jainista, el tiempo es eterno y sin forma, y el mundo, infinito e increado (siempre ha existido). El espacio lo invade todo y no tiene forma. Todos los objetos del universo existen en el espacio, el cual está dividido entre el espacio del universo y el espacio del no-universo. Hay una región central del universo en la cual viven todos los seres vivos, incluyendo los hombres, animales, dioses y demonios. Sobre esta región central se encuentra el mundo superior, dividido a su vez en dos partes. Bajo la región central queda un mundo inferior dividido en siete pisos. Esta cosmología fue un factor motivador del desarrollo de las ideas matemáticas del infinito, que no volvieron a ser consideradas de nuevo hasta finales del siglo XIX, gracias a los trabajos del matemático alemán de origen ruso Georg Cantor (1845-1918).

La cosmología jainista contemplaba un período de tiempo de 2^{588} años, esto es, 1013 065324 433836 171511 818326 096474 890383 898005 918563 696288 002277 756507 034036 354527 929615 978746 851512 277392 062160 962106 733983 191180 520452 956027 069051 297354 415786 421338 721071 661056 años.

El *Anuyoga Dwara Sutra* (ca. II a.C.) contiene otras especulaciones numéricas hechas por los jainistas. Por ejemplo, varias veces en la obra, el número de seres humanos que han existido alguna vez se da como 2^{96}.

LOGARITMOS, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Otro concepto a cuya comprensión los jainistas parecen haberse aproximado, al menos de algún modo, fue el del logaritmo. Comenzaron a entender las leyes de índices. Por ejemplo, el *Anuyoga Dwara Sutra* enuncia: «La primera raíz cuadrada multiplicada por la segunda raíz cuadrada es el cubo de la segunda raíz cuadrada».

Esto es: $\left(\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{a}}\right)=\left(\sqrt{\sqrt{a}}\right)^3$. De nuevo, el *Anuyoga Dwara Sutra* dice: «La segunda raíz cuadrada multiplicada por la tercera raíz cuadrada es el cubo de la tercera raíz cuadrada». Esto es: $\left(\sqrt{\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}\right)=\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}\right)^3$, ya que la tercera raíz cuadrada era la raíz octava de un número. Algunos historiadores dedicados al estudio de estas obras creen ver evidencias de que los jainistas habrían desarrollado logaritmos en base 2.

En el *Sthananga Sutra* se usan permutaciones y combinaciones. En las matemáticas, una permutación es la variación del orden o la manera de disponer todos o algunos de los elementos de un determinado conjunto. Así, por ejemplo, a partir del conjunto de las letras *a*, *b* y *c*, si tomamos dos de ellas y nos planteamos de cuantas maneras se pueden ordenar resulta:

ab, *ba*, *ac*, *ca*, *bc*, *cb*.

Se puede hallar este número razonando de la forma siguiente: para el primer lugar se tienen tres opciones y para el segundo solo dos, porque una letra ya está colocada, lo que da un resultado de $3 \cdot 2 = 6$.

Una combinación es el número de elecciones posible de elementos de un determinado conjunto. A diferencia del caso de las

permutaciones, no se tiene en cuenta el orden. Así, para contabilizar las combinaciones en el ejemplo anterior *ab* y *ba* serían el mismo caso, *ac* y *ca* también y lo mismo para *bc* y *cb*. En definitiva serían 3 en lugar de 6.

En el *Bhagavati Sutra* se dan reglas para el número de permutaciones de un objeto seleccionado de entre n, dos en n y tres en n. Se dan reglas similares para el número de combinaciones de uno en n, dos en n y tres en n. Las cifras se calculan en los casos en los que $n = 2, 3$ y 4. Las reglas para las combinaciones, por ejemplo, las utilizaban después para calcular el número de combinaciones que se pueden obtener a partir de un número dado de categorías filosóficas fundamentales, tomadas de una en una, de dos en dos, de tres en tres o más al mismo tiempo. Otros problemas incluyen el cálculo de los grupos que se pueden formar con los cinco sentidos y las selecciones que se pueden hacer a partir de un número dado de hombres, mujeres y eunucos.

El valor de π en las matemáticas jainistas ha sido objeto de investigación. Entre los investigadores existe interés en saber si los matemáticos indios tomaron sus ideas de los griegos o las desarrollaron por cuenta propia; no hay consenso en este punto porque no se conservan evidencias en uno o en otro sentido. En el caso de los escritos jainistas, la aproximación usada para π es $\sqrt{10}$. ¿La razón? En la cosmografía jainista, las islas y los océanos siempre tenían diámetros que se medían con potencias de 10 y era práctico usar esa aproximación.

EL JAINISMO

El jainismo es una antigua tradición religiosa no teísta de la India, aún vigente, que se considera fundada por el santón Vardhamana Mahavira en el siglo VI a.C. Frente al hinduismo, la doctrina jainista rechazó la estratificación social del sistema de castas de la civilización védica, así como la autoridad de los textos Vedas y los sacrificios rituales de animales. Propugnó una vía de salvación filosófica no centrada en el culto a ningún dios. Según la elaborada cosmología jainista, el mundo no ha sido creado por ningún ser supremo, es eterno, carece de principio y nunca dejará de existir. El universo se considera como un todo viviente y todos los seres lo reflejan y merecen respeto. El jainismo pone énfasis en el desapego de las cosas materiales a través del autocontrol y defiende un código moral que se fundamenta en la no violencia. Fomenta el desarrollo espiritual a través del cultivo de la sabiduría personal y el autocontrol a través de cinco votos principales, que condensan su código de conducta: la no violencia (*Ahimsa*); la veracidad (*Satya*); el no robar (*Asteya*); la castidad (*Bramacharya*), y el desapego con respecto a los objetos, los lugares y las personas (*Aparigraha*).

Emblema jainista de los cinco votos.

EL MANUSCRITO DE BAKSHALI

El *Manuscrito de Bakshali* es el nombre dado al trabajo matemático escrito en una corteza de abedul y encontrado en el verano de 1881 cerca de la villa de Bakhshali (o Bakhshala), en la subdivisión de Yusufzai, distrito de Peshawar (Pakistán). Actualmente está en la Biblioteca Bodleiana de Oxford (Reino Unido).

La datación de este documento es controvertida; algún historiador incluso llegó a decir que quizá no fuera indio. En un principio fue datado en el siglo XII, pero más tarde, al comparar la notación utilizada con las de diferentes etapas de la matemática india, hay un cierto consenso en reubicarlo en el período 200-400 d.C., y que sea, probablemente, una copia posterior de un documento de las primeras centurias de la era cristiana, al final del período matemático jainista, con lo que sería la prueba más antigua de las matemáticas indias exentas de cualquier asociación religiosa o metafísica. Se desconoce quién escribió este manuscrito.

El manuscrito indio es un manual de reglas y ejemplos ilustrativos, junto con sus soluciones; contiene, además, problemas de

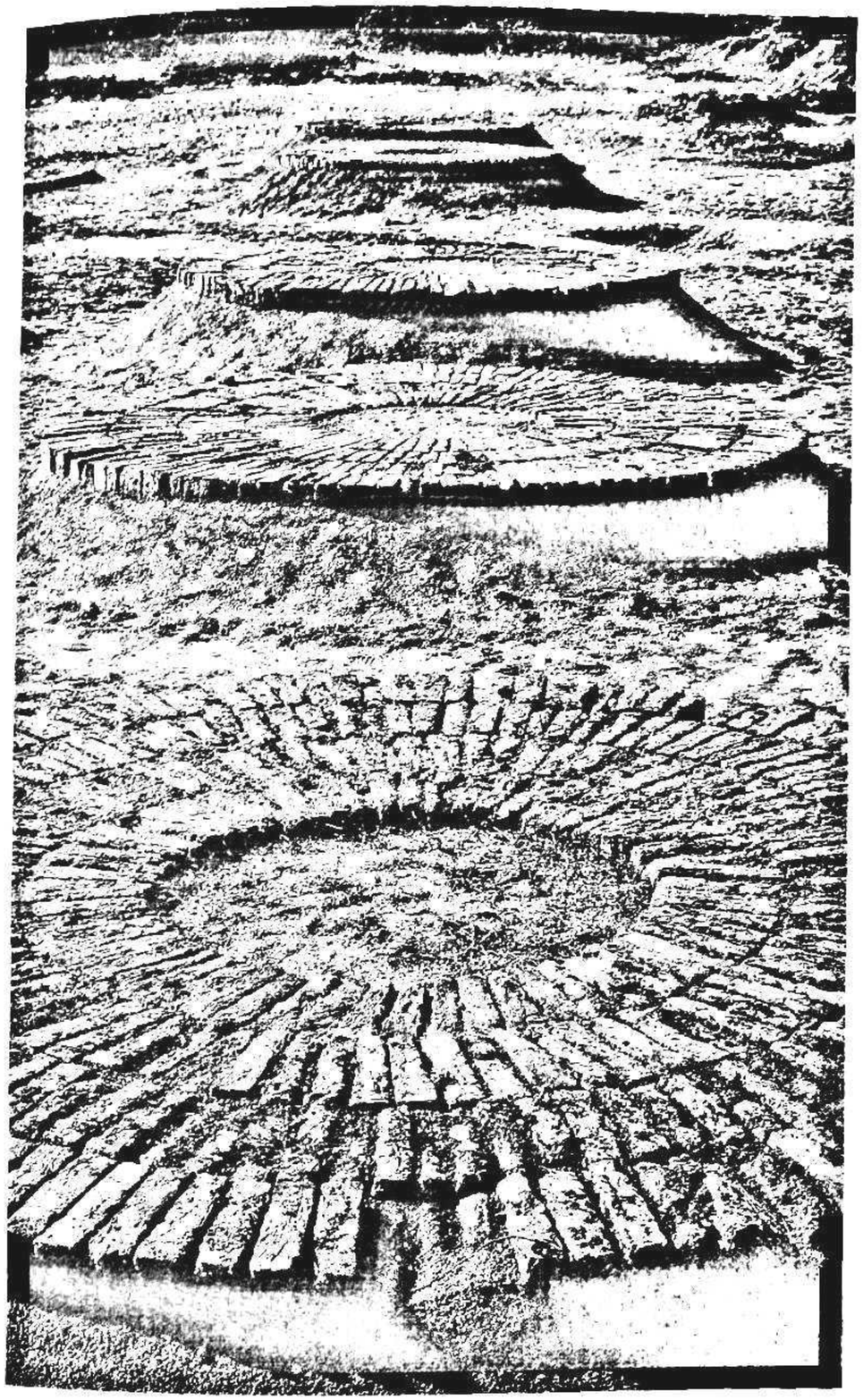
aritmética y álgebra y unos pocos de geometría y mediciones. Solo está parcialmente restaurado, por lo que es difícil establecer la cantidad de problemas de cada tipo.

LA SINGULARIDAD DEL MANUSCRITO

Los temas de la obra están organizados en *sutras*, y presentados de la forma siguiente: se formula una regla, se da un ejemplo relevante (primero literariamente, con palabras, y después en notación matemática), sigue la solución y finalmente la demostración o prueba. Los textos indios no acostumbran a presentar esta estructura, solo tienen demostración o prueba cuando son ediciones posteriores ampliadas por comentaristas del texto. Esto es otro indicio que hace pensar que el manuscrito encontrado en Bakhshali es una edición posterior de un texto que solo tenía las reglas, los ejemplos y las soluciones sin demostración alguna de las mismas.

Los temas novedosos de este manuscrito son las notaciones para las cantidades y las operaciones, la aparición de la regla de tres, un método de extracción de raíces cuadradas que mejora el de los *sulbasutras*, las primeras apariciones de ecuaciones indeterminadas y también de una serie infinita. El método de exposición sigue un orden sistemático: formulación de la regla (*sutra*); formulación de los ejemplos (*udaharana*) y demostración de la operación (*karana*) de la regla.

Así, el estado de las matemáticas indias a mediados del primer milenio de la era cristiana —basándose en la información que aporta el manuscrito— podría concretarse en las características siguientes: ya no estaban inspiradas en la religión (*Vedas*) o en la metafísica (jainistas), y habían pasado a ser prácticas y seculares, aplicadas a resolver problemas cotidianos como las ganancias y pérdidas, los cálculos de las impurezas medias del oro, los salarios o los regalos a pagar a subordinados, y los problemas sobre velocidades y distancias recorridas. Además, se mejoraron las reglas de los autores de los *sulbasutras* para calcular los valores aproximados de la raíz de 2 y se extendieron a cualquier número con un mayor grado de precisión.



Plataformas para moler granos en el sitio arqueológico de Harappa. La utilización de ladrillos de barro cocidos fue una de las características más importantes de la cultura de Harappa. La razón estándar de los ladrillos —largo, ancho y espeso— era siempre de 4:2:1, considerada la proporción óptima para edificar muros y otros elementos arquitectónicos.

CÁLCULO DE RAÍCES CUADRADAS APROXIMADAS EN EL *MANUSCRITO DE BAKHSALI*

El *Manuscrito de Bakhshali* mejoró el método de cálculo de las raíces cuadradas de los *sulbasutras*. Las instrucciones en forma de *Sutra* dicen así: «En el caso de un número no cuadrado, réstese el número cuadrado más próximo; divídase el resto por el doble [del cuadrado más próximo]; la mitad del cuadrado de esta fracción se divide por la suma de la raíz aproximada y la fracción. Esto se resta y dará la raíz corregida». Esta regla, expresada en forma algebraica, sería:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}.$$

Donde a^2 es el cuadrado perfecto más próximo a A y $r = A - a^2$.

Así, por ejemplo:

$$\sqrt{41} = 6 + \frac{5}{12} - \frac{\left(\frac{5}{12}\right)^2}{2\left(6 + \frac{5}{12}\right)} = 6{,}4031.$$

El matemático helenístico Herón de Alejandría (siglo I d.C.) utilizó una fórmula similar para hallar la raíz cuadrada de A:

$$\sqrt{A} \approx \frac{1}{2}\left(a^* + \frac{A}{a^*}\right).$$

Siendo a^* una primera aproximación a la raíz cuadrada de A, puede ser un número no entero. En el *Manuscrito de Bakhshali*, a es siempre un número entero. Para la raíz de 3, por ejemplo, se obtiene el mismo resultado si en él $a = 1$, y en la fórmula de Herón de Alejandría $a^* = 1{,}5$.

Hay pruebas que muestran la continuidad del afán por las series numéricas que habían empezado los jainistas. En este período se inició el interés por el estudio de las ecuaciones indeterminadas, aquellas cuyas soluciones dependen de uno o más parámetros (que se desarrollaría en el período clásico siguiente, en el que vivió

Brahmagupta). Esta preocupación no solo surgió asociada a los cálculos astronómicos, sino que también se utilizó en problemas recreativos. También existen pruebas de la existencia de un sistema numérico con valor posicional bien desarrollado, que incluía el cero (representado por un punto).

LOS *SIDDHANTAS* Y LA ASTRONOMÍA INDIA

Hacia la mitad del primer milenio de nuestra era hubo una notable actividad matemática en la India, que se reflejó en un aumento significativo del número de referencias a textos en sánscrito de astronomía: los *siddhantas*. Aunque se sabe que hubo un notable desarrollo de los mismos, pocos han sobrevivido.

En el último tercio del siglo VI, el astrónomo y matemático Varahamihira (también conocido como Varaj Mijira, 505-587) escribió el *Panchasiddhantika* o *Los cinco cánones astronómicos*. Esta obra suministra información sobre textos indios más antiguos, en la actualidad perdidos. *Surya-siddhanta* o *siddhanta del Sol*; *Romaka-siddhanta* (*Doctrina de los romanos*) y *Paulisa-siddhanta*, dos obras de origen occidental que influyeron en Varahamihira (aunque se ha sugerido que fue el pensamiento védico el primero en influir en la antigua astrología occidental, para después volver a la India, reformulado); *Vasishtha-siddhanta*, llamado así por una de las estrellas de la Osa Mayor, y *Paitamaha siddhanta*, obra más parecida al clásico *Vedanga Jyotisha*, uno de los primeros textos conocidos sobre astronomía y astrología de los últimos siglos antes de nuestra era.

LA SIGNIFICACIÓN DE LOS *SIDDHANTAS*

Los *siddhantas* servían para identificar las posiciones de los cuerpos celestes, tal como se ven desde un determinado lugar de observación y en cualquier momento, y poder responder así a un conjunto de preguntas relacionadas con el calendario, la geografía

y la astrología. Se trataba básicamente de encontrar las posiciones medias de los cuerpos celestes en un momento dado, corregir las posiciones medias trigonométricamente —de acuerdo con sus anomalías orbitales— y usar las posiciones verdaderas resultantes para predecir la ocurrencia de fenómenos astronómicos (salida del sol, lunas nuevas, lunas llenas, conjunciones, eclipses, etc.). También se abordaban con frecuencia cuestiones sobre cosmología y geografía, y acerca de los instrumentos técnicos para medir el tiempo y los ángulos. En general, estos tratados de astronomía estaban formulados en sánscrito mediante reglas crípticas en verso, con muy pocas explicaciones y sin ninguna demostración.

La influencia de la astronomía griega, a través de la escuela matemática de Alejandría (IV-I a.C.), se percibe, por ejemplo, en la semejanza entre algunas partes de los *siddhantas* y la astronomía y la trigonometría de Claudio Ptolomeo (ca. 100-ca. 170). En el *Paulisa-siddhanta* se utiliza 3 177/1 250 como valor de π, que coincide con el valor sexagesimal 3; 8,30 usado por Ptolomeo, es decir, $3 + 8/60 + 30/(60)^2$.

Aunque los indios hubieran adquirido conocimientos trigonométricos de la astronomía occidental, los autores de los *siddhantas* los transformaron. Convirtieron la trigonometría ptolemaica, que se basaba en la relación funcional entre las cuerdas y los correspondientes arcos o ángulos centrales en la circunferencia que ellas subtienden, en un estudio de la correspondencia entre la mitad de la cuerda y la mitad del arco o ángulo central subtendido por la cuerda total. De este cambio de la cuerda a la semicuerda, nació en la India de forma primigenia la función trigonométrica que se conoce hoy en día como el seno de un ángulo. Fue una relevante contribución de los *siddhantas* a la historia de las matemáticas.

CAPÍTULO 2

Brahmagupta y su época

Brahmagupta vivió en el siglo VII, durante la denominada «época clásica» de la antigua India, cuando ya había desaparecido el Imperio gupta y antes de las primeras incursiones islámicas. En los siglos V y VI se había operado un resurgimiento de la actividad matemática india, que abrió el camino a las contribuciones de Brahmagupta.

En los inicios de la llamada época clásica (400-1200), a mediados del primer milenio de nuestra era, y después de la aparición de los *siddhantas*, el trabajo matemático en el norte de la India se concentró sobre todo en dos centros del saber: Kusumapura y Ujjain, que contaban con canales de comunicación entre sí. Los *siddhantas* representaron importantes cambios en los métodos y prácticas astronómicas, al requerir para sus cálculos de técnicas matemáticas nuevas.

LOS ANTECEDENTES MATEMÁTICOS DE BRAHMAGUPTA

En una cultura tan antigua como la que se desarrolló en la India, existió una larga tradición de observación y estudio de los fenómenos astronómicos. Los primeros intereses por la astronomía se centraron en la observación de los solsticios y equinoccios, para realizar actividades rituales, igual que en la observación de las estrellas como marco de referencia para determinar los movimientos aparentes del Sol y de la Luna, y poder confeccionar los complicados calendarios lunisolares.

El *Vedanga Jyotisha* (el auxiliar astronómico de los *Vedas*) está considerado como el primer texto indio dedicado exclusivamente

a tratar de astronomía. En una parte del mismo se señala que debe atribuirse a las enseñanzas del sabio Lagadha (ca. 1800 a.C.). Algunos investigadores afirman que la obra debería datarse alrededor de 1400-1200 a.C., basándose en que aparece la descripción del solsticio de invierno en el grupo estelar *Shravishtha* (*Alpha Delphini* o *Sualocin*); mientras que otros discrepan y la sitúan más tarde, valiéndose de argumentos relacionados con el estilo de la misma. El texto existente parece ser de los últimos siglos antes de nuestra era, aunque se base en una tradición más remota. Sin embargo, ya se indicó que el desarrollo de la astronomía matemática india, o «astronomía siddhántica», tuvo lugar como resultado de la interacción con la cultura griega, en el conocido como «período helenístico».

El sistema tradicional indio se basaba en el seguimiento del movimiento aparente de los planetas (astros que no mantienen sus distancias angulares constantes respecto de las estrellas), en relación a la posición de veintisiete (o veintiocho) estrellas que se habían escogido como referencias. Esta guía fue sustituida por las doce constelaciones del zodíaco. Para determinar los períodos de los planetas respecto del fondo estelar se hicieron servir métodos matemáticos más complejos y para calcular sus posiciones se usaron epiciclos y deferentes, como había hecho Ptolomeo. Pero, además, los astrónomos matemáticos de la India introdujeron métodos innovadores de trigonometría plana y esférica, así como nuevas técnicas, entre las cuales figuraba la resolución de ecuaciones indeterminadas.

Entre los años finales del siglo V y principios del VI, una de las personalidades principales de la matemática y la astronomía de la época inmediatamente anterior a Brahmagupta fue Aryabhata, aunque cabe hablar de otros personajes posteriores, como Latadeva, Varahamihira y Bhaskara I.

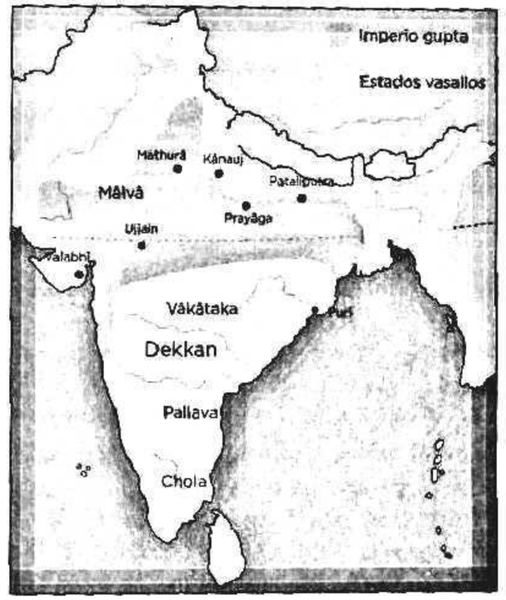
En la actualidad se posee un conocimiento muy limitado de los primeros matemáticos de la época clásica. La escasa información de que disponemos sobre predecesores inmediatos o contemporáneos de Brahmagupta se deduce de los propios escritos de estos y, en ocasiones, también de algún comentario posterior.

ARYABHATA

Entre los años 476 y 495, el monarca Budhagupta reinó en Pataliputra (actualmente, Patna). Esta ciudad, a orillas del Ganges, era la capital del Imperio gupta y se encontraba en el centro de una red de comunicaciones que permitía la llegada de conocimientos de otras

EL IMPERIO GUPTA

El Imperio gupta fue fundado por el Maharajá Sri Gupta y constituyó uno de los mayores imperios de la historia de la India. Su existencia duró aproximadamente del 320 al 550, y ocupó buena parte del subcontinente indio (la mayor parte de la India septentrional y de los actuales Pakistán oriental y Bangladés). Entre los gobernantes más destacados de la dinastía Gupta se encuentran Chandragupta I (reinó del 319 al 335 d.C.), Samudra Gupta el Grande (335-375) y Chandragupta II el Grande (375-415). La dinastía supo establecer un sistema administrativo eficaz para fortalecer su poder. En cuanto a la organización social, estuvo dominada por las creencias del hinduismo y una rigurosa división en castas. Este período se conoce como la Edad de Oro de la India porque fue una época de paz y prosperidad que se caracterizó por un notable desarrollo cultural. Bajo el gobierno de los Gupta hubo manifestaciones de creatividad en ámbitos muy diversos como el arte (arquitectura, escultura, pintura), la literatura o la filosofía, y también tuvo lugar un importante adelanto de las actividades científicas y técnicas. Fue en este ambiente cultural cuando surgieron eruditos como el poeta Kalidasa, el escritor y traductor Vishnu Sharma o el autor del *Kamasutra*, Vatsiaiana. En el campo de la astronomía y las matemáticas surgieron personalidades de la talla de Aryabhata y Varahamihira.



Ubicación del Imperio gupta y sus estados vasallos.

partes del mundo con cierta facilidad. Esto debió favorecer, sin duda, los avances matemáticos y astronómicos de Aryabhata y su escuela.

Considerado como el primer matemático indio que puede identificarse como tal, Aryabhata nació en 476, en Pataliputra. Se sabe muy poco sobre su vida, aunque, al parecer, trabajó en un observatorio astronómico relativamente cerca de su ciudad natal.

Aryabhata fue el autor del *Aryabhatiya*, una obra astronómica cuyo nombre significa «una composición de Aryabhata» y que se clasifica habitualmente como *siddhanta* aunque ya difiere de las últimas formas típicas de este género.

Aunque está dedicado principalmente a la astronomía, el *Aryabhatiya* presenta una amplia gama de temas matemáticos: en él se recopilan desarrollos anteriores. De hecho, esta obra se ha considerado, en la India, como un referente análogo a los *Elementos* de Euclides en Grecia, aunque se trate de dos obras muy diferentes. Los *Elementos* exponen, con un elevado grado de abstracción y de forma didáctica, ordenada y lógica, una síntesis de la matemática pura, mientras que el *Aryabhatiya* es una obra descriptiva, breve, escrita en sánscrito.

El *Aryabhatiya* contiene ciento veintiuna estrofas en total y se caracteriza por un estilo aforístico, es decir, breve, conciso y doctrinal en su exposición. Se suele hablar indistintamente de versos o versículos al hacer referencia a las partes de esta obra (y otras similares escritas en sánscrito y en forma poética), y, a veces, se suele identificar verso y estrofa.

La obra, que sistematizó los resultados contenidos en los *siddhantas* más antiguos, se divide en cuatro capítulos o secciones, denominados «*padas*».

La primera sección, *gitika-pada*, consiste en trece estrofas o versículos, de las cuales diez están escritas en la llamada «*métrica gitika*», distinta de la métrica de las otras (lo que ha hecho pensar a algún investigador que estas diez estrofas de la introducción fueron escritas con posterioridad). El texto continúa con la segunda sección, *ganita-pada*, de treinta y tres estrofas, a la que sigue la tercera, *kalakriya-pada*, con veinticinco estrofas. Finalmente, la cuarta y última sección, *gola-pada*, contiene medio centenar de estrofas.

> «La mitad de la circunferencia, multiplicada solo por el semidiámetro, es el área del círculo.»
>
> — ARYABHATA, VERSO 7, CAPÍTULO 2 DEL *ARYABHATIYA*.

Son las treinta y tres estrofas del segundo capítulo, el *ganita-pada*, las que tratan de matemáticas. En ellas, Aryabhata da sesenta y seis resultados o reglas matemáticas sin demostración. En muy poco espacio y en versos cortos y crípticos se condensa el conocimiento matemático de la India de aquel tiempo. Al margen del saludo y la justificación inicial, se hace una defensa de la notación posicional, se introducen procedimientos geométricos y aritméticos, el cálculo de áreas y volúmenes y la extracción de raíces cuadradas

EL SATÉLITE ARTIFICIAL INDIO *ARYABHATA*

El primer satélite artificial fabricado por la India se llamó *Aryabhata*, en honor al matemático y astrónomo indio del mismo nombre. Fue lanzado desde la antigua Unión Soviética, propulsado por un cohete Kosmos 11K65M desde el Cosmódromo de Kapustin Yar, el 19 de abril de 1975. El satélite fue fabricado por la Agencia India de Investigación Espacial (ISRO). Con una masa total de 360 kg, tenía forma de polígono de veintiséis caras, cubiertas por paneles solares excepto las caras inferior y superior. Debía realizar experimentos de rayos X, sobre aeronomía (el estudio de las capas altas de la atmósfera terrestre) y sobre física solar. Tras cuatro días en órbita, un fallo de energía inutilizó al satélite para proseguir con los experimentos programados, y al quinto día ya no se recibió ninguna señal del satélite. Reingresó en la atmósfera el 11 de febrero de 1992.

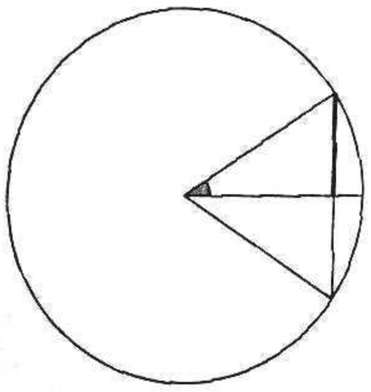
Sello de la Unión Soviética con una representación del satélite *Aryabhata*.

y cúbicas. También se calcula el área del círculo con dos aproximaciones de π: una $\sqrt{10}$ y la otra 62 832/20 000. Se puede encontrar también el cálculo de la altura y la distancia a un foco de luz con la sombra de dos gnómones, además de temas como la suma de números naturales, de cuadrados y de cubos; el cálculo de los intereses producidos por un capital, o los métodos de resolución de ecuaciones de primer grado, cuadráticas e indeterminadas de primer grado. Cabe destacar que el texto contiene el cálculo de «medias cuerdas» (seno). En la obra aparece la construcción geométrica y el cálculo de una tabla de senos para valores del primer cuadrante. En general, tratados de este tipo fueron comentados posteriormente para garantizar la comprensión de las reglas que se enunciaban en ellos. Así, relevantes matemáticos indios escribieron comentarios sobre el *Aryabhatiya*. Estos comentarios fueron realizados a partir del siglo VI, aún en vida de Aryabhata, hasta principios del siglo XX. Entre los comentaristas se incluyen Bhaskara I y Brahmagupta.

Se cree que Aryabhata escribió al menos dos obras astronómicas más, una de ellas denominada *Aryabhata-siddhanta*. Sin embargo, solamente ha sobrevivido el *Aryabhatiya*, su obra maestra. El *Aryabhata-siddhanta* es también conocido como *Ardharatrika* o «sistema de medianoche», debido a que propuso un sistema de cálculo de tiempos a partir de la medianoche, en contraposición al

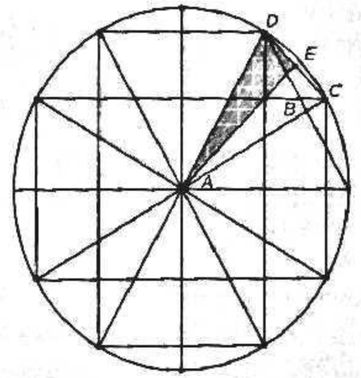
CÁLCULO DE LA TABLA DE SENOS EN EL *ARYABHATIYA*

Bhaskara I explicó cómo se calculaba la tabla de senos en el *Aryabhatiya*. En el verso 11 del capítulo 2 de dicha obra puede leerse: «Se dividirá la cuarta parte de la circunferencia de un campo uniforme circular. A partir de trilaterales [triángulos] y cuadrilaterales [rectángulos], se pueden construir encima del semidiámetro tantas medias cuerdas, asociadas a un número par de arcos unitarios, como se desee». Bhaskara I preguntaba: «¿Cuál es el tamaño de las medias cuerdas cuando el semidiámetro es 3438?» (el ángulo de 1 radián es de 3438 minutos aproximadamente). Aquí, el seno de un ángulo se denomina «media cuerda», que es la mitad de la cuerda del ángulo doble.
Bhaskara I explicó:

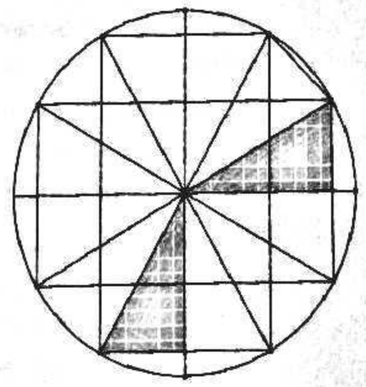


Relación entre la «media cuerda» y el seno de un ángulo.

[...] tiene sentido decir que un arco unitario puede ser igual a su cuerda; [...] Si un arco no puede ser igual a su cuerda nunca habría regularidad en absoluto para una bola de hierro sobre el suelo plano. Por tanto, deducimos que hay algún punto por el que esta bola de hierro se reclina sobre el suelo plano. Este punto es la nonagesimosexta parte de la circunferencia [así el arco unitario tiene 90°/24 que es 225']. / Procedimiento: Dibujando un círculo [...], se puede dividir este [círculo] en 12 [partes iguales]. Estas doce partes se toman como *rasis* [particiones del círculo de 30°]. / En este dibujo [cuando el arco unitario es medio *rasi*, 15°] la cuerda [entera] de cuatro arcos unitarios [60°] es igual al semidiámetro. La mitad es la [media] cuerda de dos unitarios [30°]. Y esto es 1719, que corresponde a la base [1719 es la mitad de 3438, el radio]. Corresponde a 1/2, el sen 30°.
El semidiámetro es la hipotenusa y, por tanto, la perpendicular es la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de la base y de la hipotenusa. Esto es exactamente la «media cuerda» [para nosotros el seno] de cuatro arcos unitarios [60°]. Este valor es 2978. / Cuando se resta esa cantidad del semidiámetro, el resultado [460] es la «flecha» [seno verso] de [la «media cuerda» de] dos arcos unitarios [30°]. La hipotenusa es la raíz de la suma de los cuadrados de «media cuerda» de dos arcos unitarios [30°] y la «flecha». Y esta, la hipotenusa, es la cuerda de dos arcos unitarios, que es 1780. La mitad [890] es la «[media] cuerda» de un arco unitario [sen 15°].
Los veinticuatro senos de Aryabhata son: 225, 449, 671, 890, 1105, 1315, 1520, 1719, 1910, 2093, 2267, 2431, 2585, 2728, 2859, 2978, 3084, 3177, 3256, 3321, 3372, 3409, 3431, 3438.



Representación del seno15º.



Representación del seno30º.

sistema tradicional desde el amanecer del *Aryabhatiya*. Además, utilizó parámetros algo diferentes de los del *Aryabhatiya* para las distancias y los movimientos medios de los planetas.

LATADEVA

El más destacado de los discípulos de Aryabhata fue Lataveda, quien se ganó un prestigio como profesor de astronomía. Bhaskara I se refirió a él como *acarya*, es decir, «maestro docto», y como *Sarva-siddhanta-guru*, o sea, «maestro en todos los sistemas de astronomía». Se sabe que fue autor de al menos dos obras de astronomía. Varahamihira (siglo VI) le atribuyó la autoría de dos comentarios, uno sobre el *Romaka-siddhanta* y otro sobre el *Paulisa-siddhanta*. También se le otorga la autoría de un *Surya-siddhanta*.

VARAHAMIHIRA

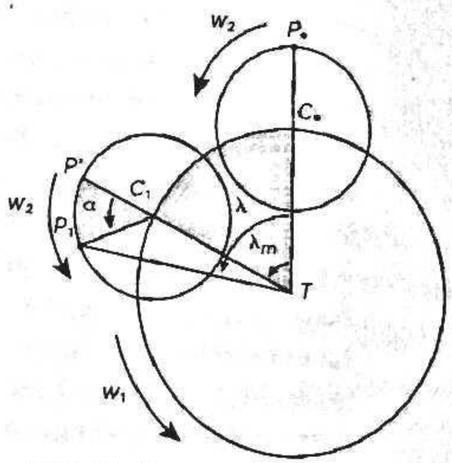
Otro personaje importante fue Varahamihira (ca. 505-587), a quien se considera más un compilador que un investigador. Se trata de uno de los pocos astrónomos que no mencionaba la fecha de sus escritos. De acuerdo con una de sus obras, Varahamihira se formó en Kapitthaka, un lugar objeto de discusiones sobre su situación.

Lo que sí se sabe es que Varahamihira trabajó en Ujjain y que su obra más famosa, el *Panchasiddhantika* (*Los cinco cánones astronómicos*), escrita en 575, constituye una de las fuentes más importantes para la historia de la astronomía india anterior a la época de Aryabhata. Además, incluye muchos ejemplos del uso de un sistema numérico posicional.

Uno de los tratados que Varahamihira resumió es el *Romaka-siddhanta*, que se basaba en la teoría del sistema epicíclico de los movimientos del Sol y de la Luna suministrado por los antiguos griegos, en el año trópico (el tiempo que le toma al Sol regresar a un equinoccio) de Hiparco y en el ciclo metónico de dicienueve años. No solo esta, sino también otras obras que Varahamihira

EL SISTEMA EPICÍCLICO GRIEGO

El sistema epicíclico griego, o sistema epiciclo-deferente, hace gala de una gran simplicidad y al mismo tiempo de una enorme versatilidad, cualidades que lo hacían muy poderoso como herramienta geométrica, capaz de aproximar trayectorias planetarias. Consistía, de forma simplificada, en suponer que el planeta (P_0) gira en un círculo (epiciclo) cuyo centro (C) gira a su vez sobre otro círculo (deferente) de centro la Tierra. La posición media (o longitud media λ_m) del planeta, visto desde la Tierra (que correspondería a P'), la da la dirección del centro del deferente (que se mueve en dirección este, igual que el planeta, con una cierta velocidad angular w_1). El epiciclo permitía ajustar (con su propia velocidad angular, w_2) la posición verdadera (o longitud λ) del planeta (que correspondería a P_1). Además, con el sistema epiciclo-deferente se pudieron explicar las retrogradaciones y el cambio de luminosidad que durante ellas tienen los planetas (interpretada como una variación de la proximidad del planeta a la Tierra).



Representación geométrica del sistema epicíclico introducido por los antiguos griegos.

sintetizó se basaban en la teoría epicíclica griega de los movimientos de los cuerpos celestes. Varahamihira revisó el calendario actualizando trabajos precedentes y teniendo en cuenta la variación de la precesión —el desplazamiento de los puntos equinocciales, puntos comunes a la eclíptica y al ecuador celeste— desde que fueron escritos los textos previos.

En relación a la interpretación de datos de los textos astronómicos de Varahamihira y otros similares, algunos estudiosos sostienen que las teorías astronómicas son de origen babilónico, mientras que otros piensan que los indios refinaron los modelos originales mesopotámicos, añadiéndoles observaciones propias.

Por otro lado, Varahamihira fue uno de los astrólogos más famosos de la historia de la India. En su obra enciclopédica *Brihat-Samhita*, conocida como *La gran compilación* y formada por ciento seis capítulos, abarcó temas de índole muy diversa, incluida la astrología. En esta obra describía los movimientos de los cuerpos celestes, las conjunciones, los eclipses y fenómenos meteorológicos como las lluvias y las nubes, aportando indicaciones acerca de los augurios asociados a tales movimientos, conjunciones o fenómenos. También señalaba qué medidas tomar ante dichos sucesos, así como las operaciones a efectuar y las señales a buscar en los seres humanos, los animales y, las piedras preciosas, entre otras cosas. La obra se ocupaba igualmente de temas tan diversos como la arquitectura, el crecimiento de los cultivos, la fabricación de perfumes, los rituales, el matrimonio y las relaciones domésticas.

La escuela matemática jainista había investigado reglas para la obtención de los números combinatorios y la manera de calcular coeficientes binomiales, pero Varahamihira dio la relación fundamental de estos últimos, escribiendo los números mediante una disposición que no es otra cosa que el triángulo de Pascal.

El astrónomo indio hizo importantes descubrimientos matemáticos. Entre estos figuraron ciertas fórmulas trigonométricas que traducidas a nuestra notación actual corresponderían a:

$$\operatorname{sen} x = \cos(\pi/2 - x),$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$(1 - \cos 2x)/2 = \operatorname{sen}^2 x.$$

Otra contribución importante a la trigonometría fueron sus tablas de senos, que mejoraron las de Aryabhata con valores más precisos.

BHASKARA I

Otro sabio, matemático y astrónomo, digno de mención es Bhaskara I, quien nació alrededor de 600, probablemente en Saurastra,

el actual estado de Gujarat, en la costa occidental de la India. Más tarde se trasladó a Asmaka, donde es posible que trabajase en una escuela de matemáticos: se cree que fue la escuela de Asmaka, situada en el distrito de Nizamabad de Andhra Pradesh, donde se reunían eruditos que eran seguidores de Aryabhata, como de hecho lo fue el propio Bhaskara I. Murió hacia 680, posiblemente en Asmaka.

> «El cálculo es figuras, sombras, series, ecuaciones, el pulverizador, etc. [...] Aquí, esta palabra "*ganita*" tiene el significado de "cálculo en su conjunto".»
>
> — BHASKARA I, EN EL *ARYABHATIYABHASYA*.

Bhaskara I escribió dos tratados de astronomía, el *Mahabhaskariya* y el *Laghubhaskariya*, y también un comentario relacionado con la obra de Aryabhata, el *Aryabhatiyabhasya*. Las tres son obras valiosas por su contenido científico.

El *Mahabhaskariya* es una obra de ocho capítulos sobre la astronomía matemática de la India, e incluye temas que eran bastante comunes en su época para este tipo de trabajos, como las longitudes y conjunciones de los planetas (entre ellos y con estrellas brillantes), los eclipses de Sol y de Luna, las salidas y puestas de Sol y el creciente de Luna.

En 629, Bhaskara I escribió el *Aryabhatiyabhasya*, un comentario referido en exclusiva a las treinta y tres estrofas matemáticas del *Aryabhatiya*. Se le considera el trabajo más antiguo escrito en sánscrito en prosa sobre matemáticas y astronomía.

ALGUNOS RESULTADOS MATEMÁTICOS DEL *ARYABHATIYA*

Una aportación original de Aryabhata fue introducida ya en el primer capítulo del *Aryabhatiya* (*gitika-pada*). Se trata de un sistema de numeración alfanumérico basado en los fonemas del sánscrito,

que se transcriben con letras del alfabeto. Aryabhata asignó números concretos a fonemas específicos, de modo que las treinta y tres consonantes estaban clasificadas en veinticinco consonantes *varga* (letras normales) y ocho consonantes *avarga* (letras variantes). Hizo corresponder las veinticinco consonantes *varga* con los números del 1 al 25, y los números 30, 40, 50, etc., hasta 100, los expresó mediante consonantes *avarga*. Por otro lado, las nueve vocales se usaron para denotar las potencias pares de diez, desde 10^0 hasta 10^{16}. Si estas mismas vocales seguían a consonantes no-vargas, entonces correspondían, respectivamente, a potencias que iban de 10^1 a 10^{17} (figura 1).

Consonantes y vocales se combinan en sílabas formando números. El orden de los dígitos es inverso al utilizado en la actualidad, pues la secuencia tradicional india de dígitos era invertida en relación a la nuestra. En consecuencia, Aryabhata comenzó, de izquierda a derecha, con unidades antes de las decenas, después cientos y miles y luego la miríada (el *lakh* = 10 000), etc.

Así, un ejemplo que aparece en la obra es:

ख्य = ख + य

khya (o *kh*[*a*]*ya*) = *kh* (o *kh*[*a*]) + *ya* = 2 + 30 = 32

Sistema alfanumérico de Aryabhata.

FIG. 1

a	*i*	*u*	*ṛ*	*ḷ*	*e*	*ai*	*o*	*au*
अ	इ	उ	ऋ	ऌ	ए	ऐ	ओ	औ
1	100	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^{14}	10^{16}

ka	*kha*	*ga*	*gha*	*ṅa*
क	ख	ग	घ	ङ
1	2	3	4	5
ca	*cha*	*ja*	*jha*	*ña*
च	छ	ज	झ	ञ
6	7	8	9	10
ṭa	*ṭha*	*ḍa*	*ḍha*	*ṇa*
ट	ठ	ड	ढ	ण
11	12	13	14	15
ta	*tha*	*da*	*dha*	*na*
त	थ	द	ध	न
16	17	18	19	20
pa	*pha*	*ba*	*bha*	*ma*
प	फ	ब	भ	म
21	22	23	24	25

ya	*ra*	*la*	*va*	*śa*	*ṣa*	*sa*	*ha*
य	र	ल	व	श	ष	स	ह
30	40	50	60	70	80	90	100

ख्य ञ = ख + य + ञ

khyu (o *kh*[*u*]*yu*) = *kh* (o *kh*[*u*]) + *y* + *u* = (2 + 30) · 10^4 = 320 000

Los parámetros numéricos astronómicos servidos por Aryabhata aparecen como una jerga extraña e impronunciable, sin ninguna cualidad estética o nemotécnica. Este es el caso, por ejemplo, cuando indica que las revoluciones del Sol en un *mahayuga* [un período cosmológico de tiempo] son *khyu-ghr*, Luna *ca-ya-gi-yi-nu-su-chlr*, Tierra *ni-si-nl-skhr*, hacia el este. Lo que se traduce, usando el particular sistema alfanumérico de Aryabhata, en los siguientes términos: «el número de revoluciones del Sol en un *mahayuga* es de 4 320 000 años, el de la Luna 57 753 336 años y el de [rotaciones diarias] la Tierra en dirección este de 1 582 237 500».

La creencia cosmológica más habitual era suponer una Tierra inmóvil y ubicada en el centro del universo con todos los cuerpos celestes girando en torno a ella. Sin embargo, Aryabhata mostró, a diferencia de otros astrónomos, la idea de que la Tierra giraba alrededor de su eje y las estrellas se mantenían fijas.

Aryabhata dio reglas para las operaciones aritméticas, indicó métodos para resolver ecuaciones de primer grado y cuadráticas y enseñó procedimientos generales para calcular sumas de números naturales, así como de sus cuadrados y sus cubos. También encontró la aproximación de π como 3,1416, y así lo explicó en el verso 10 del *ganita-pada* del *Aryabhatiya*: «añadir cuatro a 100, multiplicar por ocho, y luego agregar 62 000. Por esta regla la circunferencia de un círculo con un diámetro de 20 000 puede ser aproximada».

Lo anterior significa que la relación entre la circunferencia y el diámetro es:

$$(4 + 100) \cdot (8 + 62\,000) / 20\,000 = 62\,832 / 20\,000 = 3{,}1416.$$

Puesto que Aryabhata utilizaba la palabra *asanna* (aproximación), se ha especulado que quería indicar que no solo era una aproximación, sino que se trataba de un valor inconmensurable (irracional).

EL MÉTODO DE INVERSIÓN

En el *Aryabhatiya* aparecen ecuaciones algebraicas (en lenguaje retórico) resueltas por el método de inversión. Este procedimiento consiste en partir del resultado final e ir efectuando las operaciones inversas en sentido contrario a como se dan en el enunciado. Podemos ilustrar el método a través del siguiente problema: se multiplica un número por 3, al producto se le suman sus tres cuartas partes, la suma se divide por 7, del cociente se resta su tercera parte, la diferencia se multiplica por sí misma, al cuadrado se le restan 52, de la diferencia se extrae la raíz cuadrada, a la cual se suma 8, dicha suma se divide por 10 y el resultado es finalmente 2. ¿Cuál es ese número?

El procedimiento a seguir es el siguiente: si el resultado final es 2 y la última operación antes de llegar a 2 consiste en dividir por 10, invertimos el proceso y multiplicamos 2 por 10:

$$2 \cdot 10 = 20.$$

La operación anterior (la penúltima) consistía en sumar 8, pues lo que haremos será restar 8 al valor al que habíamos llegado:

$$20 - 8 = 12.$$

Previamente se había extraído una raíz cuadrada (operación antepenúltima), por lo que el siguiente paso será el cuadrado del número obtenido:

$$12^2 = 144.$$

Como antes de extraer la raíz cuadrada se había restado 52, ahora sumaremos la misma cifra:

$$144 + 52 = 196.$$

Siguiendo este proceso de inversión de la operación, pasamos de forma análoga de un cuadrado a la raíz:

$$\sqrt{196} = 14.$$

Previamente se había sacado una tercera parte de la cantidad que teníamos (que es lo mismo que haberla multiplicado por 2/3), así pues, ahora multiplicaremos por 3/2 que es la operación inversa a multiplicar por 2/3:

$$14 \cdot (3/2) = 21.$$

La cantidad multiplicada por 3/2 era el resultado de dividir otra entre 7, por eso ahora debemos multiplicar el último resultado por 7:

$$21 \cdot 7 = 147.$$

La cantidad que se había dividido entre 7 era el triple del número que buscamos y a este se le habían sumado sus 3/4 partes, lo que equivale a haberlo multiplicado por 7/4, de manera que ahora hemos de multiplicar por 4/7 y dividir por 3:

$$(147 \cdot (4/7))/3 = 28.$$

Obtenemos así, finalmente, el número pedido.

EL MÉTODO DEL PULVERIZADOR

También se encuentra en el *Aryabhatiya* la primera formulación inequívoca de un problema de análisis indeterminado y su solución mediante el método de la *kuttaka* o pulverizador.

Un problema que desde la antigüedad presentó gran interés para los matemáticos indios —y chinos— fue encontrar soluciones enteras a las ecuaciones diofánticas que tienen la forma $ax + by = c$ (cuya solución se obtiene generalmente con el «teorema del residuo chino»). En general una ecuación diofántica es una ecuación con coeficientes enteros de dos o más incógnitas, de la que se buscan soluciones enteras. En el comentario de

Bhaskara sobre el *Aryabhatiya* aparece el problema siguiente: «Encontrar el número que da 5 como resto cuando se divide por 8; 4 como resto cuando se divide por 9, y 1 como resto cuando se divide por 7».

Se trata, pues, de encontrar N, que cumple:

$$N = 8x+5 = 9y+4 = 7z+1.$$

Esta expresión, en nomenclatura actual (es decir, en términos de aritmética modular), equivaldría a decir:

$$N \equiv 5 \pmod 8$$
$$N \equiv 4 \pmod 9$$
$$N \equiv 1 \pmod 7.$$

Resulta que el valor más pequeño para N es 85. En general, las ecuaciones diofánticas pueden resultar notablemente difíciles. El método de Aryabhata para resolver este tipo de problemas se conoce como el método *kuttaka*, una palabra que procede de *kutt* («moler, triturar o pulverizar») y significa «pulverizar» o «romper en pedacitos»; el método involucra un algoritmo recursivo para escribir los factores originales en números más pequeños, y se convirtió en el método estándar para resolver las ecuaciones diofánticas de primer orden en la matemática india. En la actualidad, este algoritmo, elaborado por Bhaskara en el siglo VII, es el método estándar para tales ecuaciones y a veces es denominado «el algoritmo de Aryabhata».

Aryabhata también abordó las progresiones aritméticas en su obra e indicó secuencias verbales que constituyen algoritmos. Así, por ejemplo, para calcular el término central de una progresión aritmética, indicaba la secuencia: tomando primero el número deseado de términos $[n]$, disminuía luego por uno $[n-1]$, dividía por la mitad el resultado $[(n-1)/2]$, multiplicaba por el incremento [la diferencia d] y aumentaba por el primero $[a_1]$ para obtener el resultado. Lo cual, traducido a la notación actual se expresaría así: si tenemos una progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots$, es decir, una sucesión de números tales que cada uno se obtiene del anterior sumándole una constante d (la citada diferencia), entonces, si tomamos n términos y queremos saber cuál es el término central (en este caso, hemos de suponer que n es impar si hablamos de término central), este se averiguará con el algoritmo de Aryabhata:

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)d + a_1.$$

Asimismo, Aryabhata también dio reglas para saber sumar un número de términos consecutivos de una progresión, o calcular el número total de términos cuando se conoce el primero, la suma de todos ellos y la diferencia de la progresión. Como es habitual, en general estas reglas o algoritmos se enuncian pero no se indica en qué se fundamentan, es decir, no se acompañan de demostraciones matemáticas.

LA FIGURA DE BRAHMAGUPTA

A mediados del siglo VI, después de la caída del Imperio gupta, la India del norte quedó dividida en diversos reinos independientes. El rey indio Harsha, también llamado Harshavardhana (ca. 590-647), consiguió unir estos pequeños estados en un nuevo imperio. Fue proclamado como maharajá (gran rey) en 606.

Durante el reinado de Harsha se vivió una época de prosperidad. Su corte, establecida en Kanauj, se convirtió en un centro cosmopolita que atrajo a estudiosos, artistas y visitantes de todas partes. Harsha fomentó intercambios económicos y culturales entre la India y China; en este sentido, estableció relaciones diplomáticas con la dinastía Tang.

Por lo demás, Harsha adoptó el budismo como religión y fundó diversos centros de estudio budistas, alguno de los cuales llegó a contar en el momento de su mayor esplendor con una gran cantidad de estudiantes provenientes de lugares muy diversos. Fue en este contexto histórico de la India en el que transcurrieron las primeras décadas de la vida de Brahmagupta.

Brahmagupta nació hacia 598 en Bhillamala (la actual Bhinmal), en Rajastán (al noroeste de la India), por entonces capital del país de Gujara. Su padre, llamado Jishnugupta, seguramente era mercader o agricultor, ya que el sufijo «gupta» podría indicar que la familia pertenecía a la tercera casta de la división de la sociedad hindú, los vaisias, que solían dedicarse al comercio o las labores agrícolas.

Tal como sucede con Aryabhata, hay muy poca información acerca de la vida de Brahmagupta. Se sabe que, casi 130 años después de que Aryabhata concluyese su *Aryabathitya*, Bramagupta escribió su obra más emblemática, el *Brahma-sphuta-siddantha*, que podríamos traducir como *La doctrina de Brahma correctamente establecida* o *El sistema mejorado de Brahma*. Se dice que lo compuso en Ujjain, a 1300 km de Pataliputra, en el noroeste de la India, en la ribera del río Shiprá (o Kshiprá). Esta ciudad, que se encuentra en el actual estado de Madhia Pradesh, fue parte del Imperio de Harsha y era entonces el centro más destacado de las matemáticas y la astronomía indias.

Existe la opinión de que Brahmagupta tuvo la oportunidad de vivir, estudiar y enseñar en Ujjain, donde desarrollaría su actividad científica. Allí tuvo acceso a los escritos de matemáticos y científicos griegos anteriores, como Herón de Alejandría (siglo I), Ptolomeo (siglo II) o Diofanto (siglo III), además de las obras de Aryabhata o Varahamihira. En sus textos utilizó todas estas fuentes, corrigiendo sus errores.

También utilizó problemas matemáticos anteriores, incluso alguno proveniente de antiguos textos chinos, como es el caso del problema de la rotura en un palo de bambú de diez pies de largo cuya punta alcanza el suelo a tres pies del tallo. Este problema apareció por primera vez en *Los nueve capítulos sobre los procedimientos matemáticos* (*Jiŭzhāng Suànshù*), un texto compilado hacia el siglo I a.C.

En 628, a la edad de treinta años, Brahmagupta completó su obra maestra, *Brahma-sphuta-siddhanta*. La fecha de este trabajo se puede determinar por los comentarios de científicos indios

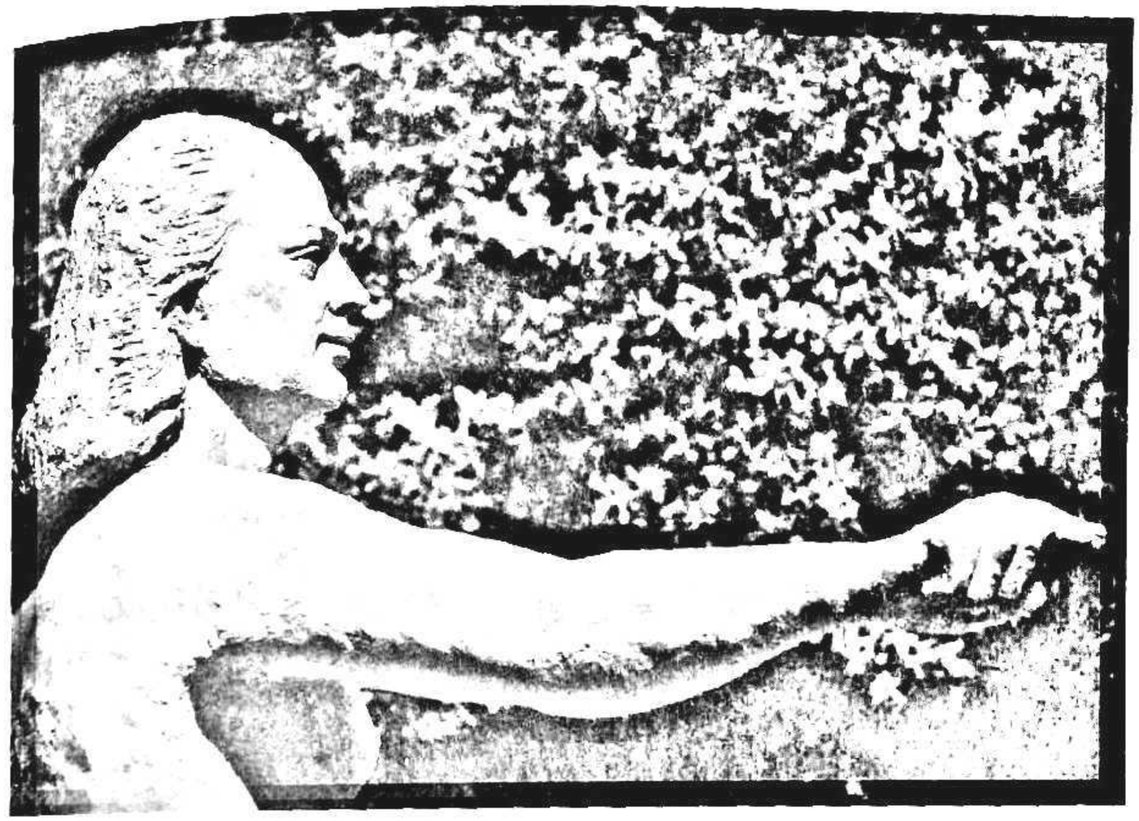


FOTO SUPERIOR:
Moderna representación escultórica de Aryabhata, emplazada en Patna, su ciudad natal.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
La obra del matemático, geógrafo y astrónomo Ptolomeo fue una de las fuentes de los trabajos matemáticos de Brahmagupta.

FOTO INFERIOR DERECHA:
Brahmagupta según un grabado del siglo XIX.

posteriores y por los datos astronómicos que contiene. Al igual que diversos matemáticos anteriores a él, como Aryabhata o Varahamihira, escribió sus textos matemáticos en forma poética, configurados como rompecabezas que servían de diversión popular. El propio Brahmagupta escribió que sus problemas matemáticos fueron llevados a cabo solo por placer.

Escribiría su segunda obra de astronomía matemática muchos años más tarde, al final de su vida, cuando ya contaba sesenta y siete años de edad. Este segundo tratado, de ocho capítulos y datado de 665, es el *Khanda-khadyaka* (literalmente, «golosina» o «dulce»). El curioso nombre de esta obra parece estar relacionado con el hecho de que es, en parte, una versión para facilitar el uso del *Aryabhatiya*.

Por otro lado, Brahmagupta fue un hindú ortodoxo y sus puntos de vista religiosos, como el sistema *yuga* hindú de medir las eras de la humanidad, influyeron notablemente en su trabajo. Un yuga (una era en sánscrito) es una edad o un tiempo dentro de un ciclo de cuatro: *Satyayuga*, *Tretayuga*, *Dvaparayuga* y *Kaliyuga*. De acuerdo con la cosmología hindú, el mundo existirá durante un período de 4320000 años solares («gran era» o *Mahayuga*) antes de disolverse y ser creado de nuevo. El primer *yuga*, *Satya*, es una edad de oro, la de más larga duración, a la que suceden unas sucesivas degradaciones, hasta llegar a la edad sombría de *Kali*, donde estaría actualmente la humanidad, y que precede a la disolución (*Pralaya*).

Brahmagupta criticó severamente tanto las concepciones cosmológicas jainistas como otras ideas heterodoxas, entre las que se encontraba, por ejemplo, la opinión de Aryabhata de que la Tierra era una esfera giratoria. Esta idea fue difundida por Bhaskara I, contemporáneo y rival de Brahmagupta.

En menos de doscientos años, la fama de Brahmagupta se extendió y traspasó las fronteras de la India, lo que lo convirtió en el primer matemático-astrónomo indio traducido al árabe.

CAPÍTULO 3

La aritmética y el álgebra

El grueso de las enseñanzas sobre aritmética y álgebra de Brahmagupta se concentra en el *Brahma-sphuta-siddhanta*. La aritmética o *ganita* versa sobre las operaciones y procedimientos con números. En el álgebra, o cálculo con incógnitas, lo más destacable es que contiene métodos de cálculo (*kuttaka*) para tratar ecuaciones o sistemas de ecuaciones indeterminados.

La obra de Brahmagupta se concentra, básicamente, en dos textos: el *Brahma-sphuta-siddhanta* y el *Khanda-khadyaka*. Tal como su nombre indica, el primero de estos textos es un *siddhanta*, es decir, un tratado de astronomía, mientras que el segundo es un *karana* o manual de dicha disciplina. En *Brahma-sphuta-siddhanta* se encuentra el grueso de las enseñanzas sobre aritmética y álgebra de Brahmagupta. La mayor parte de los textos sobre aritmética se encuentra en el capítulo doce, mientras que el grueso de las enseñanzas de álgebra se concentra en el capítulo dieciocho.

Los autores de los *siddhantas* escribían su obra siguiendo una estructura establecida y aceptada por las diferentes escuelas. Empezaban por los parámetros astronómicos y cálculos de movimientos y posiciones celestes medias; a continuación, seguían con los métodos trigonométricos, para encontrar posiciones celestes verdaderas; después se ocupaban de los instrumentos de cálculo para hallar la dirección aparente, el lugar y el tiempo de un fenómeno celeste visto desde un lugar terrestre concreto; posteriormente, abordaban los cálculos de los eclipses lunares y, para concluir, los de los eclipses solares.

Brahmagupta reprodujo la estructura recién descrita en el *Brahma-sphuta-siddhanta*, ya que los diez primeros capítulos del libro contienen temas básicos de astronomía: las longitudes medias de los planetas; las longitudes verdaderas de los planetas; los

problemas de la rotación diurna; los eclipses lunares; los eclipses solares; las salidas y puestas del Sol; la Luna creciente; la sombra de la Luna; las conjunciones de los planetas entre sí, y las conjunciones de los planetas con las estrellas fijas.

En el capítulo undécimo Brahmagupta formuló sus críticas a textos anteriores, en particular al *Aryabhatiya* de Aryabhata. El capítulo duodécimo contiene sesenta y seis versos de lo que llamaríamos «aritmética» o «cálculo con números». A continuación vienen cinco capítulos más de contenido relacionado con temas de astronomía. Y, por último, el capítulo dieciocho tiene ciento un versos dedicados al pulverizador, junto con otras reglas para buscar cantidades desconocidas, incluyendo métodos para ecuaciones indeterminadas de segundo grado.

La división de temas entre los capítulos duodécimo y decimoctavo refleja una distinción premeditada, la primera en los textos sánscritos que se conservan, y atañe a lo que textos posteriores llamarán «cálculo manifiesto» y «cálculo no manifiesto», esto es, cálculo sin incógnitas o con incógnitas, es decir, aritmética y álgebra en términos actuales.

ARITMÉTICA O *GANITA*

Ya se indicó que el término *ganita* se usa en los textos indios de diferentes maneras. Por un lado, para designar los algoritmos de cálculo en astronomía —en contraposición a los modelos geométricos— y de modo más general para referirse a la astronomía cuantitativa en oposición a otras disciplinas más descriptivas, como la astrología. Sin embargo, *ganita* también se usa en un sentido más amplio, para referirse al cálculo en general o a las técnicas de cálculo, esto es, al conjunto de las disciplinas matemáticas. Con tal significación fue empleado en los capítulos de los textos *siddhantas* medievales, así como en otros textos independientes que se refieren al cálculo más allá del contexto de la astronomía.

En los primeros textos *siddhantas* se incluían unos capítulos relativos a los cálculos requeridos para la astronomía propiamente dicha. Al cabo de algunos siglos aparecieron textos independientes, dedicados exclusivamente al cálculo. De hecho, estos capítulos de asunto más matemático ya incluían temas como la extracción de la raíz cúbica, reglas para el interés y el trueque, fórmulas de volumen para pilas de cereales o de madera, etc. Todo parece indicar que, en un principio, la astronomía fue el contexto general en el que se desarrollaron las matemáticas, pero, más tarde, se fueron añadiendo temas más amplios que finalmente dieron lugar a tratados matemáticos separados.

Pese a lo anterior, algunos indicios permiten afirmar que la instrucción matemática también tuvo lugar fuera del ámbito de la astronomía, hacia mediados del primer milenio. Por ejemplo, los capítulos de matemáticas no estaban casi nunca en el principio de los textos *siddhantas*, tal vez la única excepción sea el *Aryabhatiya*, cuyo capítulo de *ganita* (cálculo) está precedido tan solo por un capítulo introductorio, en el que se establecen los valores de los parámetros del modelo astronómico que se seguía. Por ello se puede inferir que la enseñanza del cálculo no se consideraba el primer deber de un texto de astronomía matemática. Así pues, cabe pensar que el primer texto independiente de *ganita* (cálculo) se desarrolló en paralelo a los primeros textos de astronomía matemática, o tal vez antes, pero simplemente no ha llegado hasta nosotros.

En cualquier caso, tanto si la matemática evolucionó como un saber independiente o supeditada a la astronomía, lo cierto es que pronto alcanzó una existencia autónoma.

Los autores medievales raramente discutían la originalidad de un determinado algoritmo, y se hace difícil distinguir las reglas que ellos mismos descubrían y las que compilaban de otros autores. Lo que sí puede afirmarse es que ninguno intentaba o descubría desde la nada. Aryabhata utilizó la notación decimal posicional, pero ¿la inventó él? Brahmagupta desarrolló la aritmética de los números positivos y negativos, así como el cero, y fue el primero del que se conservan textos en este sentido. Sin embargo, esto no permite afirmar que fuera el primero en utilizarlo. Lo único que se puede constatar es que, en esas fechas, los matemáticos indios habían formulado esos conceptos fundamentales y que hubo que

esperar unos cuanto siglos para que tales contribuciones llegasen a incorporarse a la matemática occidental.

OPERACIONES Y PROCEDIMIENTOS CON NÚMEROS

A continuación se expondrán, por orden numérico sucesivo, los diferentes versos del capítulo 12 del *Brahma-sphuta-siddhanta*, agrupados por temas.

«Quien conoce por separado las veinte operaciones empezando por la suma, y los ocho procedimientos acabando con las sombras, es un matemático.»

— BRAHMAGUPTA, EN *BRAHMA-SPHUTA-SIDDHANTA*, CAPÍTULO 12, VERSO 1.

Brahmagupta fue el primer autor conocido que clasificó los temas matemáticos de esta manera ordenada, pero tal vez supusiera que el lector estaba familiarizado con ellos, pues no describió cada operación de una en una.

LAS OPERACIONES MATEMÁTICAS

Las reglas de los doce versos siguientes permiten suponer que las veinte operaciones citadas en el primer verso son: la suma (1), la resta (2), la multiplicación (3), la división (4), la elevación al cuadrado (5), la extracción de la raíz cuadrada (6), la elevación al cubo (7), la extracción de la raíz cúbica (8), la reducción de fracciones por cinco métodos diferentes (9, 10, 11, 12 y 13), la regla de tres (14), la regla de tres inversa (15), otras cuatro reglas con proporciones de la regla de cinco a la regla de once (16, 17, 18 y 19) y los trueques o intercambios (20).

Una vez caracterizadas las veinte operaciones, Brahmagupta estableció ocho procedimientos: mixturas o análisis de combinaciones de cantidades (1), series (2), figuras (geometría) (3), exca-

SISTEMA DE NUMERACIÓN POSICIONAL Y SISTEMA DE NUMERACIÓN NO POSICIONAL

Del mismo modo que en una escritura alfabética todas las palabras se pueden escribir utilizando un número limitado de letras, así ocurre también con los números enteros, que se pueden representar por medio de diez cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Y en la historia de la escritura de los números, dos cuestiones son importantes para entender el significado numérico de una determinada escritura: si es una escritura posicional o no, y la base con la que se cuenta. En la escritura posicional el valor de las cifras viene determinado por su posición en la escritura de los números. En los números romanos, el símbolo X siempre significa diez, ocupe la posición que sea en la escritura de un número. Así, en XC sirve para indicar que se ha escrito noventa (cien menos diez), y en CX para indicar ciento diez (cien más diez). En cambio, en nuestro sistema actual de escribir las cifras, noventa se escribe como 90 y novecientos como 900. En los dos casos el 9 toma un valor distinto según el lugar. Esto significa que detrás de esta escritura está la idea siguiente:

$$90 = 9 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0,$$
$$900 = 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0.$$

En este caso, además, el sistema cuenta en base 10.

Contraste de sistemas

Un sistema posicional de base 2 (sistema binario) como el que se usa en el lenguaje computacional puede asociar cada dígito al paso o no de corriente por un determinado circuito. Si en el sistema posicional de base diez, 101 se lee como ciento uno, esto es:

$$101 = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$

En base binaria 101 significa

$$101 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0,$$

que recalculado en base decimal es

$$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 0 + 1 = 5.$$

Desde el punto de vista operativo, un sistema posicional permite asociar los algoritmos de cálculo de las cuatro operaciones básicas —la suma, la resta, la multiplicación y la división— usando el lugar que ocupa cada dígito. Los numerales indios llegaron a Europa en el siglo XII, a través de textos árabes traducidos al latín, y las cuatro operaciones con números grandes, que solo unos pocos sabían hacer con la ayuda del ábaco, en unos pocos años se generalizaron gracias a la ayuda de los nuevos numerales indoarábigos, que permitían la resolución de cálculos con algoritmos basados en la notación posicional.

vaciones o volúmenes (4), pilas o cálculo de objetos apilados (5), aserrado o cálculos relativos a la madera (6), montones o cálculos relativos a montículos de granos (7) y sombras de gnómones (8).

ARITMÉTICA DE LAS FRACCIONES

En los versos 2 a 5 introdujo la «aritmética de las fracciones», reglas para operar con las fracciones, porque consideraba que las reglas para los enteros ya eran conocidas con anterioridad por los estudiosos que leerían el libro. Así por ejemplo, el verso 2 dice: «De dos fracciones, los divisores y los numeradores multiplicados por los divisores opuestos tienen el mismo divisor. Además, los numeradores deben agregarse; en la sustracción se calculará la diferencia de numeradores».

Esta regla, traducida al lenguaje algebraico actual diría:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

En síntesis, las otras reglas para operar con a/b y c/d son fracciones y números enteros:

$$n+\frac{a}{b}=\frac{nb+a}{b}\ ;\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Ambas reglas están contenidas en el verso 3. En el verso 4 expresa de forma retórica la regla:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Y en el verso 5 aparecen las dos reglas siguientes:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}\qquad\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

En los versos 6 y 7, Brahmagupta trata sobre la elevación al cubo y la extracción de raíces cúbicas de la forma siguiente: «Se establece el cubo del último dígito, el cuadrado del último dígito multiplicado por tres y por el dígito anterior, y el cuadrado del

dígito anterior multiplicado por el último dígito y por 3, y el cubo del dígito anterior. Después se suman estas cantidades y se obtiene el cubo». Este método va acompañado de indicaciones sobre la manera en que se deben disponer en el espacio los resultados de las operaciones indicadas para obtener la respuesta final. Si trasladamos cada instrucción y la disponemos en el lugar adecuado para el caso de calcular el cubo de 74, la disposición debería ser la que muestra la tabla siguiente:

Las operaciones	La instrucción de los versos 6 y 7
3 4 3 $= 7^3$	Se establece el cubo del último dígito,
5 8 8 $= 3\cdot 4\cdot 7^2$	el cuadrado del último dígito multiplicado por tres y por el dígito anterior,
3 3 6 $= 3\cdot 7\cdot 4^2$	y el cuadrado del dígito anterior multiplicado por el último dígito y por 3,
6 4 $= 4^3$	y el cubo del dígito anterior.
4 0 5 2 2 4 $= (74)^3$	Después se suman estas cantidades y se obtiene el cubo.

Lo que hay en la base de este procedimiento es el valor posicional de los dígitos. En la misma época, en la matemática occidental los números no se expresaban en un sistema decimal posicional, y, por lo tanto, efectuar el cubo de una cantidad era mucho más complicado. Esta regla es la que corresponde a imaginar el número 74 como siete decenas y cuatro unidades, esto es:

$$74 = 7\cdot 10 + 4,$$

y efectuar el cálculo desarrollando $(7\cdot 10+4)^3$ como si se desarrollase $(a+b)^3$. Así, al calcular $(7\cdot 10+4)^3$ de la misma manera que se calcula $(a+b)^3$ se obtiene

$$(7\cdot 10+4)^3 = 7^3\cdot 10^3 + 3\cdot 7^2\cdot 10^2\cdot 4 + 3\cdot 7\cdot 10\cdot 4^2 + 4^3$$

porque el caso general es: $(a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$.

REDUCCIÓN DE FRACCIONES

Los versos 8 y 9 tratan acerca de las reglas de reducción de fracciones. En este punto, Brahmagupta dio normas para simplificar lo que consideraba que eran los cinco tipos de cantidades expresadas en forma de fracciones.

La combinación o adición de dos fracciones se expresa de la forma siguiente:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Las fracciones de fracciones o el producto de fracciones se expresan como:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

La suma de un número con una fracción, esto es, la combinación de una cantidad entera con una cantidad fraccionaria se realiza mediante:

$$n+\frac{a}{b}=\frac{nb+a}{b}.$$

Finalmente, una fracción más o menos una fracción de la fracción viene dada por:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a(d\pm c)}{bd}.$$

REGLA DE TRES, OTRAS REGLAS DE PROPORCIONALIDAD Y SUMAS DE SERIES

Los versos 10 a 13 se refieren a la regla de tres y otras reglas de proporcionalidad. Así, por ejemplo, el verso 10 dice: «En una regla de tres hay un argumento, un resultado y una cantidad deseada. Las medidas de la primera y la última son similares. La cantidad deseada multiplicada por el resultado y dividida por el argumento

es el resultado (de la cantidad deseada)». Igual que había hecho Aryabhata, si se traslada el verso 10 a la notación simbólica actual para resolver la proporción $a : b = x : d$, donde x es la cantidad desconocida, el cálculo propuesto consiste en hacer $x = ad/b$. Después, Brahmagupta consideró el caso de la proporción inversa, esto es, cuando el aumento de la cantidad que «mide» b, produce una disminución en el «fruto» en a. En este caso, la regla para hallar x es: $x = ab/d$.

Para problemas con proporciones compuestas, Brahmagupta explicó que el «fruto» se debe intercambiar en ambos lados, y que la respuesta es el producto de los números mayores dividido por el producto de los menores. Así, un ejemplo típico de regla de cinco podría ser: si una pieza de tela de longitud l_1 y anchura a_1 se compró por un precio p_1, ¿cuál es el ancho x de una pieza de longitud l_2 que se compró por un precio p_2? Las instrucciones de Brahmagupta sugieren una manipulación del tipo siguiente:

$$\begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & l_1 & l_2 \\ a_1 & & a_1 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & l_1 & l_2 \\ a_1 & & a_1 & \\ p_1 & p_2 & p_2 & p_1 \end{array} \rightarrow x=\frac{l_1\cdot a_1\cdot p_2}{l_2\cdot p_1}$$

Los versos 14 a 16 se refieren a «mezclas» y presentan algunas fórmulas para problemas de cantidades mezcladas, empezando por el cálculo de inversiones. Igual que hizo Aryabhata, Brahmagupta no dio reglas específicas para calcular el interés simple a partir de un saldo inicial, la razón y el tiempo, pensando seguramente que para resolverlo basta con conocer la denominada «regla de tres cantidades». Pero sí que propuso situaciones en las que se debe encontrar el saldo inicial a partir del saldo final y la suma de intereses al final de un determinado período, o bien encontrar el tiempo que se necesita para que un saldo inicial a un interés determinado se convierta en un múltiplo concreto del mismo. También trató problemas de mezclas cuyos participantes contribuyen con diferentes cantidades en una aventura comercial, y sobre cómo se deben repartir las ganancias o pérdidas.

Los versos 17 al 20 se refieren a series. Las reglas para las sumas, la interpolación y el número de términos de una progresión

UNA REGLA DE TRES DIRECTA Y UNA REGLA DE TRES INVERSA

En términos generales, se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar una magnitud la otra también aumenta. En cambio, dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar una disminuye la otra. Así, por ejemplo, si pensamos en una situación ideal en que diversas personas trabajan todas a un mismo ritmo, si sabemos que tres personas producen doce cajas, podemos plantear la pregunta siguiente: ¿cuántas cajas producirán siete personas? En esta situación, parece claro que si están trabajando más personas, todas al mismo ritmo, producirán más cajas. ¿Cómo se calcula el resultado? Se trata de una regla de tres directa, esto es:

$$a : b = x : d,$$

donde x es la cantidad desconocida, el cálculo propuesto consiste en hacer $x = ad / b$.
Así, $12 : 3 = x : 7$, y siguiendo el cálculo propuesto por Brahmagupta en el verso 10 del capítulo 12 del *Brahma-sphuta-siddhanta*, obtendríamos: $x = (12 \cdot 7) / 3 = 28$. Y se puede concluir que siete personas producirán 28 cajas.
En cambio, si en un trabajo colectivo —por ejemplo, la limpieza de una playa o la recolección de fruta en un campo— cuatro personas lo hacen en tres horas, podemos plantear la pregunta siguiente: ¿cuánto tiempo necesitarán para realizar la misma labor seis personas? En esta situación aumenta el número de personas y, en cambio, se espera que disminuya el tiempo de ejecución. Se trata de una regla de tres inversa, esto es: el aumento de la cantidad que «mide» b, produce una disminución en el «fruto» en a. En este caso la regla para hallar x es: $x = ab / d$.
Así, $x = (4 \cdot 3) / 6 = 2$. Y se puede concluir que seis personas necesitarán solo dos horas para realizar el trabajo colectivo.

aritmética son equivalentes a las de Aryabhata. También dio reglas equivalentes a las de Aryabhata para «sólidos apilados», esto es, en notación actual:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \text{o bien } \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{y también } \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Los versos del 21 al 54 se refieren a geometría: cálculos de áreas, volúmenes y sombras de gnómones (se tratarán en el capítulo siguiente dedicado a la geometría y a la trigonometría).

Los últimos versos, del 55 al 65, se dedican a cálculos varios. Una vez expuestos las veinte operaciones y los ocho procedimientos ya mencionados, se añaden unos versos para introducir algunos trucos y consejos que faciliten cálculos básicos que incluyan multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces.

En el último verso, Brahmagupta prometió explicar el resto de procedimientos de cálculo en la «construcción del seno» (capítulo 21) y en el «pulverizador» (capítulo 18).

ÁLGEBRA. CÁLCULOS CON INCÓGNITAS

Si el capítulo 12 del *Brahma-sphuta-siddhanta* lleva por título *Ganita*, el capítulo 18 se denomina *Kuttaka*, el «pulverizador», aunque puede traducirse más libremente por «álgebra». Allí se examina el cálculo con incógnitas de primero y de segundo grado. Pero lo que da realmente título a este capítulo es que contenga métodos de cálculo para tratar ecuaciones o sistemas de ecuaciones indeterminados, esto es, ecuaciones con más de una incógnita o sistemas con más incógnitas que ecuaciones.

La elaboración de cálculos astronómicos y calendarios es la razón que explica por qué los matemáticos indios de esta época —y también los chinos— se interesaron por la resolución de ecuaciones y sistemas indeterminados mucho antes que los matemáticos occidentales, cuyos precursores en este asunto fueron el suizo Leonhard Euler (1707-1783) y el alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Todos los calendarios necesitan un comienzo. Un calendario construido en China durante la dinastía Wei (220-265) tomó como punto de partida la última vez que el solsticio de invierno coincidió con el principio de un mes lunar, que fue también el primer día de un ciclo sexagenario (de sesenta días) artificial, conocido como *jia zi*. El objetivo era localizar exactamente el número de años —medidos en días— desde el comienzo del calendario. Puede re-

formularse el problema en notación simbólica moderna: sea y el número de días de un año trópico, n el número de años desde el comienzo del calendario, d el número de días de un mes sinódico, r_1 el número de días del ciclo sexagenario entre el solsticio de invierno y el último día del *jia zi* precedente, y r_2 el número de días entre el solsticio de invierno y el comienzo del mes lunar. El número de años (n) desde el comienzo del calendario puede entonces calcularse a partir de

$$yN = 60a + r_1 = bd + r_2.$$

Esto es:

$$yN \equiv r_1 \pmod{60}$$
$$yN \equiv r_2 \pmod{d}.$$

Lo que significa que se debe hallar un valor r_1 y un valor r_2 de manera que yN (el número de días de un año trópico multiplicado por el número de años desde el comienzo del calendario) dividido por 60 da resto r_1, y a su vez yN dividido por d da resto r_2.

Alineaciones más complejas, incluidas las conjunciones de los planetas, fueron elaboradas en forma de modelos para calcular los comienzos de los calendarios. En el siglo V, el matemático y astrónomo Zu Chongzhi resolvió un conjunto de diez congruencias lineales. Cálculos parecidos con congruencias también fueron resueltos por Aryabhata y Brahmagupta. Esta fue la razón de que desarrollaran el método de *kuttaka*, a la par que los matemáticos y astrónomos chinos desarrollaban un método equivalente, que ellos denominaron *qiuyishu*.

«Como que los problemas no se pueden resolver sin el pulverizador, explicaré el pulverizador junto con los problemas.»

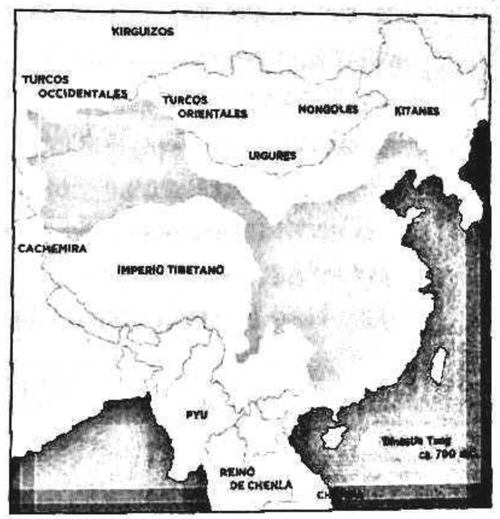
— BRAHMAGUPTA, EN *BRAHMA-SPHUTA-SIDDHANTA*, CAPÍTULO 18, PRIMER VERSO 1.

Declaró Brahmagupta que «Un maestro [*acarya*] entre los que conocen los tratados se caracteriza por conocer el pulverizador, el cero, las [cantidades] positivas y negativas, incógnitas, eliminación del [término] medio, [solución de la ecuación de segundo grado], color-único [ecuaciones o ecuaciones con una sola incógnita], producto de incógnitas, así como naturaleza cuadrática [problemas con ecuaciones indeterminadas de segundo grado]». Muchos de los métodos para operar con cantidades desconocidas (incógnitas), a pesar de que aquí se han clasificado junto al pulverizador, no conllevan directamente ecuaciones lineales indeterminadas. Brahmagupta trataba no solo las reglas de cálculo, sino también numerosos problemas simples (aunque sin dar la solución) para ilustrar su aplicación.

Los versos 3 a 29 se refieren al pulverizador y sus aplicaciones en astronomía. La técnica es esencialmente la misma que la utilizada en el *Aryabhatiya*. La cuestión estriba en hallar el tiempo en el que un planeta o planetas tienen una posición media dada.

CONEXIONES ENTRE LAS MATEMÁTICAS INDIAS Y CHINAS

Desde aproximadamente el primer siglo de nuestra era, la India se convirtió en el centro de peregrinación de los budistas de China, abriéndose así el camino a un intercambio científico y cultural que duraría varios siglos. En un catálogo de las publicaciones realizadas durante la dinastía Sui (581-618) aparecen traducciones chinas de obras indias de astronomía, matemáticas y medicina. Los anales de la dinastía Tang (618-907) indican que fueron contratados astrónomos del Indostán por el Consejo Astronómico de Changan, para que enseñaran los principios de la astronomía india. La solución de las ecuaciones indeterminadas con el método denominado *kuttaka* en la India y *qiuyishu* en China constituyó una pasión permanente para los matemáticos de ambas culturas.



Extensión del territorio controlado por la dinastía Tang hacia el año 700

LAS REGLAS DE LOS SIGNOS Y LA ARITMÉTICA DEL CERO

Los versos 30 a 35 se refieren a «las reglas de los signos y la aritmética del cero». Brahmagupta dio aquí la primera explicación conocida de la matemática india acerca de la aritmética de los números positivos y negativos. Casi todas las reglas son idénticas a sus homólogas en el álgebra moderna actual.

«La suma de dos positivos es positiva; la suma de dos negativos es negativa; la suma de un positivo y un negativo es la diferencia; si son iguales es igual a cero.»

— BRAHMAGUPTA, EN *BRAHMA-SPHUTA-SIDDHANTA*, CAPÍTULO 18, VERSO 30.

Una cantidad diferente de cero dividida por cero parece permanecer de alguna manera dividida por cero; no está claro cómo cambia una cantidad dividida por cero. Parece indicarse que el signo de la raíz cuadrada corresponde al signo de la cantidad inicial que se elevó al cuadrado. La secuencia de operaciones se acaba con los cuadrados y las raíces cuadradas; elevar al cubo y las raíces cúbicas se omiten en el álgebra, posiblemente porque no existe un método estandarizado para resolver la ecuación cúbica.

El verso 36 hace referencia a la «concurrencia» y el «método de las diferencias». Aquí se proporcionan sendas reglas para hallar dos cantidades a partir de sus sumas y productos: 1) si de dos cantidades desconocidas, a y b, se conocen sus sumas y diferencias, esto es, $(a + b)$ y $(a - b)$, entonces la concurrencia establece la regla siguiente:

$$a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2},\quad b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}$$

y 2), de manera similar, si se conoce su diferencia y la diferencia de sus cuadrados se obtiene a y b así:

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}+(a-b)\right),\quad b=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}-(a-b)\right).$$

Los versos del 37 al 40 se refieren a «*karanis*» o «irracionales». Aquí se exponen métodos para tratar irracionales (o lo que es igual, métodos de racionalización). Se trata de operar con fracciones y retrasar al máximo la extracción de la raíz cuadrada. Las reglas de Brahmagupta se podrían expresar, en notación actual, de la forma siguiente: siendo K_1, K_2, K_3, K_4, números que no son cuadrados perfectos, y a, b, m cantidades elegidas de tal manera que K_1/m y K_2/m son ambos cuadrados perfectos, entonces:

$$a\sqrt{K_1}\cdot b\sqrt{K_1}=abK_1$$

$$\sqrt{K_1}\pm\sqrt{K_2}=\sqrt{m\left(\sqrt{\frac{K_1}{m}}\pm\sqrt{\frac{K_2}{m}}\right)^2}$$

$$\sqrt{K_1}\cdot\left(\sqrt{K_2}+K_3\right)=\sqrt{K_1K_2}+\sqrt{K_1K_3}$$

$$\frac{\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}}{\sqrt{K_3}+\sqrt{K_4}}=\frac{\left(\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}\right)\cdot\left(\sqrt{K_3}-\sqrt{K_4}\right)}{\left(\sqrt{K_3}+\sqrt{K_4}\right)\left(\sqrt{K_3}-\sqrt{K_4}\right)}=\frac{\left(\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}\right)\cdot\left(\sqrt{K_3}-\sqrt{K_4}\right)}{K_3-K_4}.$$

Los versos 41 y 42 se refieren a «términos combinados». Dentro del proceso de operar con términos desconocidos y potencias de diferentes grados, Brahmagupta expuso las reglas para combinar potencias hasta el grado seis (cuando se pueden sumar o restar las potencias y cuando se deben dejar separadas). Los productos de potencias de la misma incógnita dan potencias de mayor grado, mientras que el producto de diferentes incógnitas (o «colores») se debe dejar como productos separados.

En notación actual sería, por ejemplo: $x^2 + x^3 = x^2 + x^3$,

pero en el caso del producto $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$,

y en cambio con dos incógnitas: $x^2 \cdot y^3 = x^2 \cdot y^3$.

Todos estos versos iniciales preparan al lector para el cálculo con incógnitas sobre el que trata la segunda parte del capítulo 18. Primero se ha establecido que hará falta un método potente, *kuttaka* o pulverizador, después cómo se deben tratar los signos

y el cero, y también la importancia de los cálculos, porque su contexto más propio era el estudio astronómico.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

La resolución de ecuaciones de primer y segundo grado aparece en los versos del capítulo 18 del *Brahma-sphuta-siddhanta* justo antes de la resolución de ecuaciones indeterminadas y del uso del *kuttaka* o pulverizador.

EQUIVALENCIA DE LA RESOLUCIÓN ACTUAL DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON LA ELIMINACIÓN DEL TÉRMINO DEL MEDIO DE BRAHMAGUPTA

Lo que ahora llamamos *b*, Brahmagupta lo llamaba «término del medio», por eso al procedimiento lo denominaba «eliminar el término del medio». Esta manera de nombrar el procedimiento indica que había una manera estandarizada de escribir las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = c$, en el que efectivamente el término con *x* está en medio y lo que se debe hacer es eliminarlo, algo así como el procedimiento siguiente, en notación actual, en el que el término en *x* formaría parte de un cuadrado perfecto:

$$ax^2 + bx = c$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{c}{a}$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac + b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{4ac + b^2}{4a^2}} = \sqrt{\frac{4ac + b^2}{2a}}.$$

Los versos 43 al 59 se refieren a técnicas y ejemplos para resolver ecuaciones con una incógnita. El texto retoma los temas descritos en el segundo verso del capítulo, sobre las ecuaciones «de un solo color» (resolución de ecuaciones de primer grado) y de «eliminar el término del medio» (resolución de ecuaciones de segundo grado). Brahmagupta, como Bhaskara I en sus comentarios del *Aryabhatiya*, usaba términos en sánscrito que significan «igual» o «hecho igualmente» para referirse a ciertas combinaciones que en la actualidad se traducirían como ecuaciones.

Para las ecuaciones de primer grado, el método es equivalente al del *Aryabhatiya* si se trata de resolver una ecuación del tipo b_1 incógnitas más c_1 unidades igual a b_2 incógnitas más c_2 unidades. En notación actual:

$$b_1x + c_1 = b_2x + c_2.$$

El valor para la incógnita x se obtiene así:

$$x = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2}.$$

En cuanto a las ecuaciones de segundo grado, cuando un múltiplo b de la incógnita sumado con un múltiplo a del cuadrado de la incógnita es igual a un número c,

$$bx + ax^2 = c,$$

entonces el valor x de la incógnita se encuentra con algoritmos equivalentes a los dos siguientes:

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}, \text{ o bien } x = \frac{\sqrt{ac + (b/2)^2} - b/2}{a}.$$

Es fácil darse cuenta de que estas fórmulas son las equivalentes a la que conocemos habitualmente cómo la solución de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

cuando la ecuación de segundo grado se escribe como:

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CON DOS INCÓGNITAS POR EL MÉTODO DEL «PULVERIZADOR»

Dada una ecuación $ax + c = by$ en la que a y b no tienen divisores comunes, se transforma la ecuación inicial en otra equivalente, de manera que la nueva ecuación tenga uno de los coeficientes igual a 1, y a partir de aquí se reconstruyen las soluciones hasta regresar a la ecuación inicial. De este proceso viene el nombre del método —*kuttaka* o «pulverizador»—, pues lo que se hace es «triturar» la ecuación inicial, hasta conseguir otra con uno de los coeficientes igual a la unidad. El procedimiento consiste en realizar una serie de cambios de variables condicionados por los coeficientes de la ecuación. Para empezar se divide el mayor de los coeficientes (supongamos que sea a) por el menor (b) de la ecuación inicial $ax + c = by$, así se tiene un cociente q y un resto r tales que:

$$a = bq + r,$$

tras lo cual se hace el cambio

$$y = qx + u$$

y se sustituye en la ecuación inicial,

$$(bq + r)\,x + c = b(qx + u),$$

con lo que la eliminación de términos iguales a los dos lados de la igualdad reduce la ecuación a

$$rx + c = bu,$$

como que $r < b < a$, la nueva ecuación es más sencilla que la inicial. El proceso se repite hasta que uno de los coeficientes sea uno. Por ejemplo, sea la ecuación

$$29x + 4 = 8y \quad (1),$$

si dividimos el coeficiente mayor entre el menor:

$$29 = 8 \cdot 3 + 5,$$

y se hace el cambio

$$y = 3x + u,$$

esto que lleva a la ecuación

$$(8 \cdot 3 + 5)x + 4 = 8\,(3x + u),$$

y simplificada a

$$5x + 4 = 8u \quad (2).$$

Se empieza de nuevo el proceso: se divide el coeficiente mayor entre el menor y se obtiene

$$8 = 5 \cdot 1 + 3,$$

y se hace el cambio

$$x = u + v$$

que lleva a la ecuación

$$5(u + v) + 4 = 8u$$

y simplificada a

$$5v + 4 = 3u \quad (3).$$

Por tercera vez se repite el proceso:

$$5 = 3 \cdot 1 + 2.$$

Y el cambio es ahora

$$u = v + w,$$

y la nueva ecuación

$$(3 \cdot 1 + 2)v + 4 = 3\,(v + w),$$

y simplificando se obtiene una cuarta ecuación

$$2v + 4 = 3w \quad (4).$$

Por cuarta vez se repite el proceso:

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

el cambio es ahora

$$v = w + t,$$

y la quinta ecuación:

$$2t + 4 = w \quad (5).$$

Ya se ha conseguido que el coeficiente de una de las incógnitas sea uno. Entonces se da a la otra incógnita un cierto valor y se rehace el camino en sentido contrario, esto es:

si $t = 0$, entonces
$w = 4$, según la quinta ecuación (5)
$v = 4$, según la cuarta ecuación (4)
$u = 8$, según la tercera ecuación (3)
$x = 12$, según la segunda ecuación (2)
$y = 44$, según la ecuación inicial (1).

Si se necesita la solución más pequeña posible, se divide 12 por 8 (el coeficiente de la y) y 44 por 29 (el coeficiente de la x), divisiones que dan lugar a los restos 4 y 15. Es decir:

$$12 = 8 \cdot 1 + 4$$
$$44 = 29 \cdot 1 + 15.$$

Estos restos, 4 y 15, son la solución buscada. Dicho de otra manera, en cuanto tenemos una solución particular, es fácil comprobar que las demás proceden de la siguiente fórmula:

$$x = 8m + 4$$
$$y = 29m + 15.$$

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

La posibilidad de tener dos soluciones de acuerdo con el signo de la raíz no se señala explícitamente en el *Brahma-sphuta-siddhanta*, pero se ha argumentado que algunos problemas simples de Brahmagupta indican que se pueden utilizar las dos soluciones de la raíz, la positiva y la negativa.

ECUACIONES INDETERMINADAS Y *KUTTAKA*

Una ecuación indeterminada es una ecuación para la cual hay un conjunto infinito de soluciones, por ejemplo, $2x = y$. Las ecuaciones indeterminadas no siempre pueden ser resueltas directamente con la información dada. Por ejemplo, las ecuaciones

$$ax + by = c$$
$$x^2 - Py^2 = 1$$

donde a, b, c y P son enteros (siempre que P no sea un número cuadrado). Para las ecuaciones indeterminadas, sí hay diferentes incógnitas en términos separados de la ecuación. Brahmagupta indicó que hay que resolverlas en términos del otro, es decir, como se hace en la actualidad al resolver sistemas de ecuaciones compatibles indeterminadas, dependiendo de un parámetro. Si hay demasiadas incógnitas se debe aplicar el pulverizador.

Los versos 60 a 63 tratan sobre la resolución de ecuaciones con dos incógnitas y sus productos. Los métodos anteriores de «único-color» no sirven para ecuaciones que tienen más de una incógnita en el mismo término. Si un problema contiene dos incógnitas y su producto, por ejemplo para resolver la ecuación

$$axy = bx + cy + d$$

el método de resolución consiste en introducir un valor arbitrario m que se iguala al coeficiente de la y en la ecuación inicial, esto es $(ax - c)$, y a partir de este se generan pares de soluciones x, y con la ayuda de un segundo valor

$$n = \frac{ad + bc}{m}.$$

Así se obtiene:

$$x = \frac{m + c}{a} \qquad y = \frac{n + b}{a}.$$

O bien, como señalaba Brahmagupta, pueden asumirse simplemente todas las incógnitas, excepto una, igual a números arbitrarios, y luego resolverse el resto de las incógnitas.

Los versos 64 a 71 se refieren a la «naturaleza-cuadrada» o a ecuaciones indeterminadas de segundo grado. El nombre sánscrito de esta técnica, *varga-prakrti*, significa «naturaleza del cuadrado»; también envuelve un juego de palabras entre *prakrti*, «naturaleza», y *krti*, «cuadrado». Los problemas sobre la naturaleza-cuadrada, o lo que sería más propio sobre la naturaleza de elevar al cuadrado, hacen referencia a las propiedades que deben ser tenidas en cuenta a la hora de trabajar con diversas incógnitas de segundo grado en una misma ecuación. El texto de Brahmagupta es el primero, de los que se tiene noticia, que trata este tema.

En los problemas de naturaleza-cuadrada se requiere encontrar dos cantidades racionales, de forma que sus cuadrados satisfagan ciertas condiciones. En particular, para un multiplicador N, hay que encontrar números racionales x, y que satisfagan la ecuación

$$Nx^2 + 1 = y^2,$$

una forma particular de escribir la que actualmente se conoce como «ecuación de Pell», en referencia al matemático inglés John Pell (1610-1685). Igual que en el caso del pulverizador para el grado uno, la solución se obtiene transformando la ecuación inicial por otra, de la misma forma que se pueda resolver de forma trivial, y luego operando hasta volver a la ecuación de partida.

CÓMO GENERAR PARES DE SOLUCIONES

Cuando una ecuación contiene dos incógnitas y el producto de las mismas, Brahmagupta rechazaba el método de utilizar una de las incógnitas como parámetro. Dada la ecuación

$$axy = bx + cy + d \quad (1),$$

sea un número arbitrario m que se iguala a $ax - c$, esto es:

$$m = ax - c \quad (2),$$

si se toma n como

$$n = \frac{ad + bc}{m}$$

entonces también se cumple que

$$n = ay - b \quad (3),$$

ya que según la fórmula con la que se introduce n,

$$n = \frac{a(axy - bx - cy) + bc}{m} = \frac{amy - abx + bc}{m} = \frac{amy}{m} - \frac{ax - c}{m}b =$$
$$= \frac{amy}{m} - \frac{m}{m}b = ay - b.$$

Obsérvese que la introducción del valor m y la igualación de este valor con $ax - c$ no es nada casual, pues $ax - c$ es nada más y nada menos que el coeficiente de la y en la ecuación de partida. Si se escriben los términos con y en un lado de la igualdad y el resto en la otra, se obtiene:

$$axy = bx + cy + d$$
$$axy - cy = bx + d$$
$$(ax - c)\, y = bx + d,$$

y el cambio es

$$m = ax - c,$$

esto es, el coeficiente de y. Lo mismo ocurre si ahora se realiza el mismo proceso para los términos con x:

$$axy = bx + cy + d$$

$$axy - bx = cy + d$$
$$(ay - b)\, x = cy + d,$$

y el cambio

$$n = ay - b$$

es el coeficiente de x. De las ecuaciones (2) y (3) se deduce que

$$x = \frac{m + c}{a} \quad y = \frac{n + b}{a}.$$

Una simple sustitución permite comprobar que estos valores hallados para x e y son soluciones de la ecuación de partida (1):

$$a\frac{(m+c)}{a}\frac{(n+b)}{a} = b\frac{m+c}{a} + c\frac{n+b}{a} + d$$
$$\frac{(m+c)(n+b)}{a} = \frac{b(m+c)}{a} + \frac{c(n+b)}{a} + d.$$

Desarrollando los paréntesis:

$$\frac{mn + cn + bm + cb}{a} = \frac{bm + bc + cn + cb}{a} + \frac{ad}{a},$$

y simplificando:

$$n = \frac{ad + bc}{m},$$

que es justamente la relación introducida al principio.

Por tanto, la construcción de soluciones para la ecuación

$$axy = bx + cy + d$$

mediante la introducción del valor arbitrario m, y el valor intermedio

$$n = \frac{ad + bc}{m},$$

genera soluciones verdaderas x e y.

Para encontrar las soluciones x, y, Brahmagupta indica que se debe tomar un determinado número cuadrado, por ejemplo a^2, tal que al multiplicar por el número dado N y aumentado o disminuido el resultado en un número determinado k, produzca un cuadrado perfecto llamado b^2. Dicho de otro modo, se construye una ecuación indeterminada auxiliar de segundo grado,

$$Na^2 + k = b^2,$$

de la que se pueda obtener la solución de a, k y b simplemente a vista. Entonces se construye una segunda ecuación auxiliar así:

$$N(2ab)^2 + k^2 = (Na^2 + b^2)^2,$$

en esta situación, x e y se obtienen con un algoritmo correspondiente a las fórmulas siguientes:

$$x = \frac{2ab}{k}, \quad y = \frac{Na^2 + b^2}{k}.$$

Se puede demostrar la validez del método de Brahmagupta manipulando la primera ecuación auxiliar,

$$Na^2 + k = b^2$$

$$-k = Na^2 - b^2$$

$$k^2 = N^2a^4 - 2Na^2b^2 + b^4$$

$$N\left(\frac{2ab}{k}\right)^2 + 1 = \left(\frac{Na^2 + b^2}{k}\right)^2.$$

Por tanto, estas expresiones de

$$x = \frac{2ab}{k}, \quad y = \frac{Na^2 + b^2}{k}.$$

son una solución de la ecuación $Nx^2 + 1 = y^2$.

La misma regla se puede aplicar en un sentido más general para construir otras ecuaciones de naturaleza cuadrática, más allá de dos concretas dadas. Así, si se tienen $Na_1^2 + k_1 = b_1^2$, y también

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES INDETERMINADAS DE SEGUNDO GRADO SEGÚN BRAHMAGUPTA

Sea la ecuación $8x^2 + 1 = y^2$. El método de Brahmagupta consiste en visualizar una solución o raíz para una de las dos incógnitas y ajustar hasta conseguir una solución para la y. Se empieza con la solución menor para x, esto es $x = 1$. Tras lo cual se sustituye y se obtiene $8 \cdot 1^2 + 1 = 9$, que resulta ser un cuadrado perfecto. Ya que $3^2 = 9$, se ha localizado la solución

$$x = 1 \quad y = 3,$$

y ahora se trata de buscar otro par de soluciones. Se sitúan las soluciones obtenidas de la forma siguiente:

Raíz menor	Raíz mayor	Incremento
1	3	1
1	3	1

Si se multiplican las raíces entre ellas de forma cruzada, esto es $1 \cdot 3$ y $1 \cdot 3$, y se suman los resultados, se obtiene:

$$3 + 3 = 6 = x \quad y = 17,$$

y se sustituyen en la ecuación. A continuación de nuevo se disponen los elementos en forma de tabla:

Raíz menor	Raíz mayor	Incremento
1	3	1
6	17	1

Si se multiplican las raíces entre ellas de forma cruzada, esto es $1 \cdot 17$ y $6 \cdot 3$, y se suman los resultados, se obtiene

$$17 + 18 = 35 = x \quad y = 99$$

con lo que se sustituye la ecuación. De este modo se han obtenido las soluciones sucesivas (1, 3), (6, 17), (35, 99), y siguiendo el proceso se pueden obtener más pares de soluciones.

$Na_2^2 + k_2 = b_2^2$ entonces

$$N(a_1b_2 + a_2b_1)^2 + k_1k_2 = (Na_1a_2 + b_1b_2)^2.$$

Los versos 72 a 74 se refieren a otros métodos de producir cuadrados con determinadas condiciones. Por ejemplo, si $(x + y)$ $(x - y)$ y $(xy + 1)$ son todos cuadrados perfectos, y a y b son dos cantidades arbitrarias, entonces se puede escribir:

$$x = \left(a^2 + b^2\right) \cdot \frac{2a^2}{b^4} \quad y = \left(a^2 - b^2\right) \cdot \frac{2a^2}{b^4}.$$

Y también si para dos cantidades cualesquiera, a y b, x es tal que $(x + a)$, y $(x - b)$ son ambos cuadrados perfectos, y m es una cantidad elegida arbitrariamente, entonces se puede escribir

$$x = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{m} - m\right)\right)^2 + b.$$

Finalmente, los versos 75 a 98 se refieren a muestras de problemas y aplicaciones. Brahmagupta cerró la parte técnica del capítulo con una variedad de problemas de muestra donde pudo aplicar los métodos para tratar las indeterminaciones en situaciones relacionadas con la astronomía.

En estos últimos versos, Brahmagupta subrayó la importancia de dominar cuestiones del tipo: «Con lo que aquí se ha explicado, un matemático podrá resolver cuestiones planteadas en otros trabajos. En las asambleas de la gente podrá destruir el brillo de otros astrónomos como el Sol destruye el brillo de otras estrellas». Estos rompecabezas eran útiles por lo menos para el prestigio profesional, como una insignia de la maestría en materia tan difícil.

CAPÍTULO 4

La geometría y la trigonometría

Brahmagupta abordó temas de geometría en el *Brahma-sphuta-siddhanta* y de trigonometría tanto en este como en el *Khanda-khadyaka.* Por lo que se refiere a la geometría, su aportación más notable fueron los procedimientos para calcular el área del triángulo y del cuadrilátero a partir de sus lados. En trigonometría mejoró las tablas de senos e introdujo una fórmula de interpolación para hallar senos intermedios que no aparecen en las tablas.

La geometría de Brahmagupta se refiere al cálculo de áreas y diagonales a partir de longitudes de lados en triángulos y cuadriláteros. También se adentró en el cálculo del área del círculo y de algunos volúmenes, como pirámides y troncos de pirámide. Del mismo modo trató sobre la trigonometría de forma extensa en el *Brahma-sphuta-siddhanta*, y en el *Khanda-khadyaka* de una forma más práctica y concreta; para simplificar, como él mismo escribió, los procesos de cálculo del *Brahma-sphuta-siddhanta*.

En el contexto de la matemática del período clásico indio, decir «trigonometría» significa referirse a la construcción de funciones trigonométricas equivalentes a las actuales funciones de seno y coseno. Brahmagupta mejoró las tablas de veinticuatro valores de sus predecesores y, además, introdujo una fórmula de interpolación para calcular nuevos valores intermedios no contenidos en una tabla más simple y reducida de solo seis valores.

BRAHMAGUPTA, GEÓMETRA

Brahmagupta empezó su extensa colección de reglas de geometría con una alusión a los cálculos «aproximados» y «exactos» de áreas de triángulos y cuadriláteros.

«El área aproximada es el producto de la mitad de las sumas de los lados opuestos de un triángulo o un cuadrilátero. El área exacta es la raíz cuadrada del producto de la mitad de las sumas de los lados disminuidos respectivamente de cada lado.»

— BRAHMAGUPTA, EN *BRAHMA-SPHUTA-SIDDHANTA*, CAPÍTULO 12, VERSO 21.

No dio más detalles sobre esas fórmulas ni a qué tipo de figuras podían ser aplicadas, pero se puede observar que para cualquier cuadrilátero de lados a, b, c, d, y de perímetro $p = a + b + c + d$, tal como se puede ver en las diferentes formas geométricas de la figura 1, el área se puede escribir como

$$A \approx \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

en el caso del área aproximada, y

$$A = \sqrt{\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)\left(\frac{p}{2}-d\right)}$$

en el caso del área exacta.

Si se considera un lado, por ejemplo d, igual a cero, las reglas se pueden usar para los triángulos de lados respectivos a, b, c. De hecho la fórmula exacta es la que se conoce actualmente como «fórmula de Herón», para los triángulos, y la versión para los cuadriláteros como «generalización de Brahmagupta». Es exacta solo en el caso en que los cuadriláteros sean cíclicos, esto es, cuando se puedan inscribir en un círculo (lo son los rectángulos y los trapecios isósceles, así como algunos cuadriláteros escalenos). Aunque Brahmagupta no lo dijo explícitamente, parece que así lo asumía, dado el desarrollo posterior de todas las fórmulas que introdujo para cuadriláteros.

Si c_1 y c_2 son segmentos en la base del triángulo (como puede observarse en la figura 1, ejemplo D) determinados por la altura h, entonces se cumple:

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(c + \frac{b^2-a^2}{c}\right); \quad c_2 = \frac{1}{2}\left(c + \frac{b^2-a^2}{c}\right); \quad h = \sqrt{a^2-c_1^2} = \sqrt{b^2-c_2^2}.$$

Estas fórmulas se pueden demostrar yuxtaponiendo los dos triángulos rectángulos en los que se descompone el triángulo mediante la altura h.

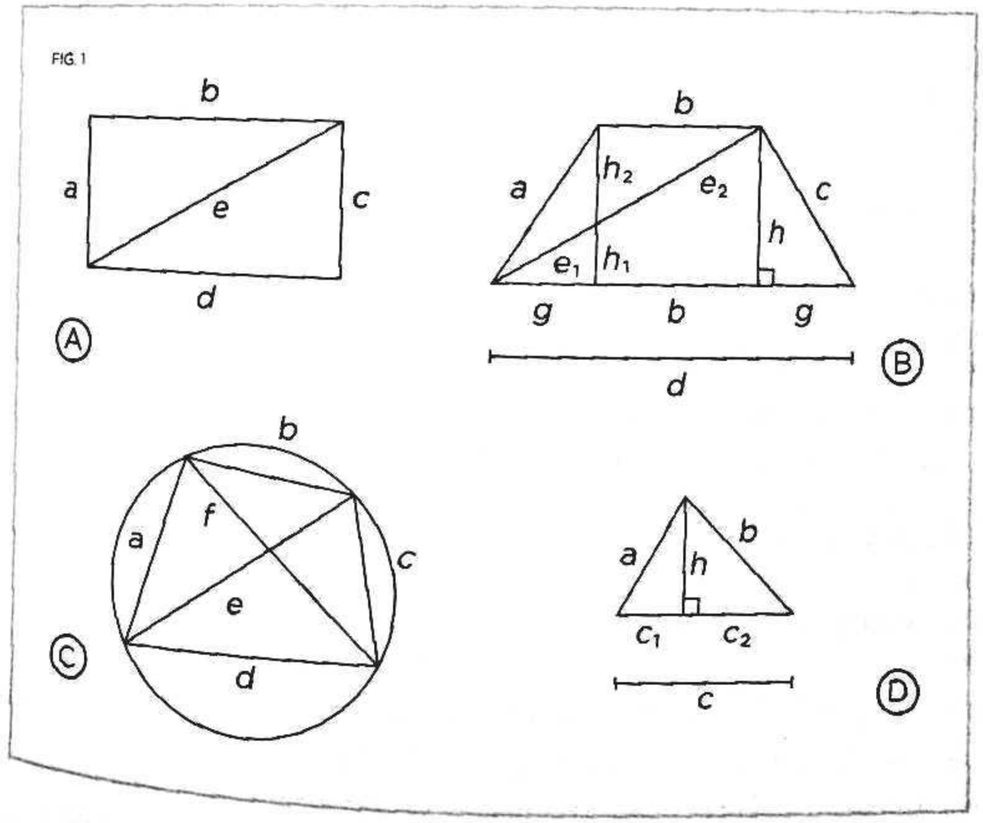
En un trapecio isósceles (figura 1, B), en el que una diagonal queda dividida en dos segmentos, las reglas que rigen son:

$$e = \sqrt{ac + bd};$$

$$h = \sqrt{e^2 - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2}.$$

En un triángulo rectángulo, por ejemplo el a, h, c_1, las reglas que se cumplen son:

$$c_1 = \sqrt{a^2-h^2}; \quad h = \sqrt{a^2-c_1^2}; \quad a = \sqrt{h^2+c_1^2}.$$



Figuras rectilíneas de las reglas geométricas de *Brahma-sphuta-siddhanta*.
A: rectángulo.
B: trapecio isósceles.
C: cuadrilátero cíclico. D: triángulo.

LA FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA

En geometría euclidiana, la «fórmula de Brahmagupta» —llamada así en honor a Brahmagupta, que fue quien la utilizó por primera vez— permite hallar el área de un cuadrilátero cíclico (es decir, el que se puede inscribir en una circunferencia) cuyos lados tienen longitudes *a*, *b*, *c*, *d*:

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

donde *s* es el perímetro del cuadrilátero.

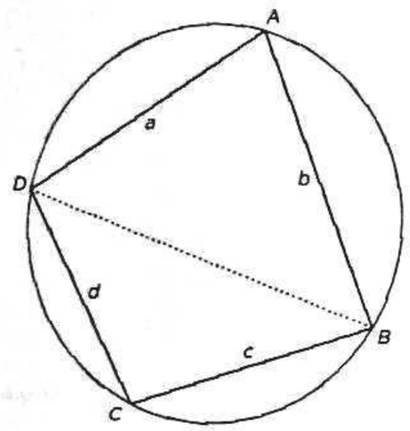


Figura de Wikipedia: Fórmula de Brahmagupta

El área de un cuadrilátero se puede determinar como la suma de las áreas de dos triángulos obtenidos al dividir el cuadrilátero en dos triángulos utilizando una de las dos diagonales.

Así, se indica por ΔADB el triángulo de lados *AD*, *DB* y *BA* obtenido al dividir en dos el cuadrilátero a través de la diagonal DB. De forma análoga el triángulo ΔBCD es el formado por los lados *BD*, *DC* y *CB*.

Conviene recordar que el área de un triángulo se puede expresar a partir de sus lados y del seno del ángulo opuesto. Así, una vez dividido en dos triángulos el cuadrilátero cíclico a través de la diagonal *DB*, el área del cuadrilátero se puede expresar como la suma de las áreas de los dos triángulos.

$$A = \text{área}\,\Delta ADB + \text{área}\,\Delta BDC = \frac{ab\,\text{sen}\,\hat{A}}{2} + \frac{cd\,\text{sen}\,\hat{C}}{2},$$

ABCD es un cuadrilátero cíclico, se cumple $\widehat{DAB} = 180° - \widehat{DCB}$, y, por tanto, $\text{sen}\hat{A} = \text{sen}\hat{C}$.

Así, la ecuación del área del cuadrilátero se convierte en

$$A = \frac{ab\,\text{sen}\hat{A}}{2} + \frac{cd\,\text{sen}\hat{A}}{2},$$

y elevando al cuadrado, en $A^2 = \frac{\text{sen}^2\hat{A}}{4}(ab+cd)^2$.

Multiplicando la igualdad por 4 y utilizando la igualdad $\text{sen}^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = 1$ se obtiene:

$$4A^2 = \left(1-\cos^2\hat{A}\right)(ab+cd)^2 = (ab+cd)^2 - \cos^2\hat{A}(ab+cd)^2\ (*).$$

Aplicando el teorema del coseno para el triángulo *ADB* y para el triángulo *BDC* e igualando las expresiones por el lado *DB*, se construye una expresión que sustituirá a $\cos^2\hat{A}(ab+cd)^2$ en la ecuación del área:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{A} = c^2 + d^2 - 2cd\cos\hat{C}.$$

Además, $\cos\hat{C} = -\cos\hat{A}$ porque el cuadrilátero es cíclico, y

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{A} = c^2 + d^2 + 2cd\cos\hat{A}.$$

Reordenando se obtiene $2\cos\hat{A}\cdot(ab+cd) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$.

Al sustituir esta expresión en (*), se obtiene

$$4A = (ab+cd)^2 - \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4},$$

y eliminando el denominador

$$16A^2 = 4(ab+cd)^2 - \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2.$$

Teniendo en cuenta que la expresión anterior es una diferencia de cuadrados, se puede descomponer en el producto de suma por diferencia y se obtiene, para la ecuación del área del cuadrilátero,

$$16A^2 = \left[2(ab+cd)+\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)\right]\left[2(ab+cd)-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)\right].$$

El primer corchete de la ecuación anterior se puede agrupar de la forma siguiente:

$$\left[2(ab+cd)+\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)\right] = (a+b)^2 - (c-d)^2.$$

Con lo que vuelve a ser una diferencia de cuadrados y se vuelve a descomponer en suma por diferencia:

$$\left[(a+b)+(c-d)\right]\left[(a+b)-(c-d)\right] = (a+b+c-d)(a+b-c+d).$$

Otro tanto sucede con el segundo corchete de la expresión inicial de $16A^2$. Finalmente se obtiene para este corchete la expresión: $(c+d+b-a)(c+d-b+a)$. Sustituido todo en la expresión $16A^2$, se obtiene la igualdad siguiente:

$$16A^2 = (a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a),$$

pero $(a+b+c-d) = 2(s-d)$ con $s(\text{semiperímetro}) = \frac{a+b+c+d}{2}$, así para los otros paréntesis, luego

$$16A^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

Simplificando y tomando la raíz cuadrada se obtiene:

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Obsérvese que estas relaciones son las que provienen del hecho de ser triángulos rectángulos y de aplicar el célebre teorema de Pitágoras. Los segmentos h_1, h_2 de la altura h y los segmentos e_1, e_2 de una diagonal cumplen:

$$e_1 = \frac{g}{g+b}\cdot e;\quad e_2 = \frac{b}{g+b}\cdot e;\quad h_1 = \frac{g}{g+b}\cdot h;\quad h_2 = \frac{b}{g+b}\cdot h.$$

Estas relaciones provienen de la proporcionalidad geométrica registrada entre los diferentes triángulos en que queda dividido el trapecio.

En el caso del radio r de una circunferencia que circunscriba un trapecio, o un cuadrilátero, o un triángulo, el correspondiente radio r:

$$r = \frac{ae}{2h},$$

en el del cuadrilátero escaleno:

$$r = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{2} = \frac{\sqrt{b^2+d^2}}{2},$$

y en el caso del triángulo:

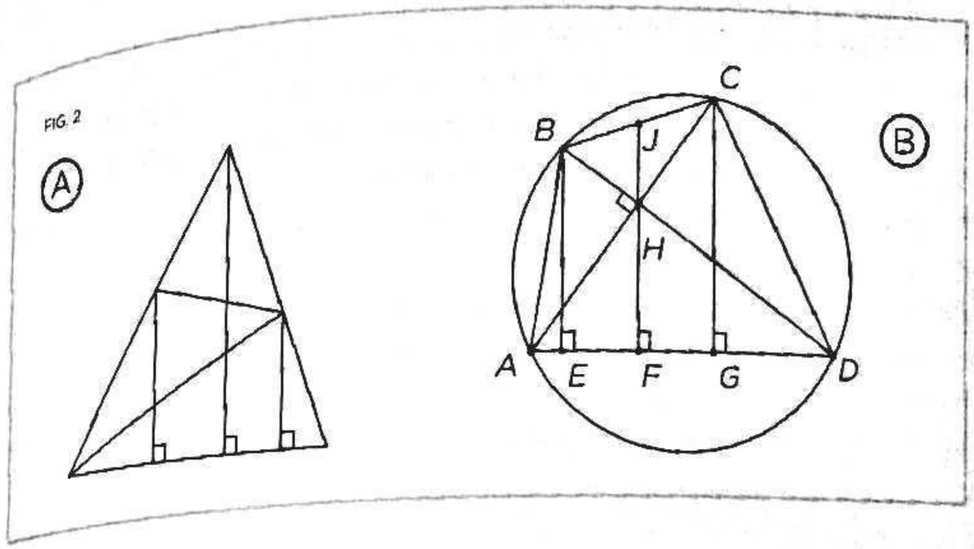
$$r = \frac{ab}{2h}.$$

Las diagonales e y f de un cuadrilátero escaleno (cíclico) serían:

$$e = \sqrt{\frac{(ad+bd)(ac+bd)}{ab+cd}};\quad f = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}.$$

CUADRILÁTEROS CÍCLICOS: EL TEOREMA DE BRAHMAGUPTA

A continuación, Brahmagupta planteó los valores de los segmentos de diagonales y los segmentos de alturas de un cuadrilátero escaleno, o también de la figura aguja (el triángulo que se obtiene si, a partir de un cuadrilátero escaleno cíclico, se prolongan dos lados opuestos hasta formar un triángulo, como se aprecia en la figura 2).



A: «Figura aguja» asociada a un cuadrilátero. B: «Cuadrilátero de Brahmagupta», con las alturas correspondientes del teorema de Brahmagupta.

En particular, el matemático indio estableció en el verso 12.31 la regla para los segmentos de alturas producidos por las diagonales en un «cuadrilátero de Brahmagupta» (esto es, un cuadrilátero con las diagonales perpendiculares): «Los dos segmentos inferiores de las dos diagonales son dos lados de un triángulo; la base es la del cuadrilátero. Su perpendicular (altura) es la parte inferior de la perpendicular central; la porción superior de la perpendicular central es la mitad de la suma de las otras perpendiculares (alturas del cuadrilátero) disminuidas cada una de ellas de la parte superior de la perpendicular central (altura del triángulo)».

Los dos segmentos menores de las dos diagonales AC y BD, son los segmentos AH y HD. La perpendicular central es JF y los lados perpendiculares son BE y CG. Brahmagupta estableció entonces que la JH de JF se obtiene así:

$$JH = \frac{(BE - HF)+(CG - HF)}{2}.$$

En otras palabras, la altura desde J con respecto a la base AD está a medio camino entre las alturas desde B y desde C. Esto implica que J biseca BC, lo cual se conoce como «teorema de Brahmagupta», y se expresa con el siguiente enunciado: «La perpendicular a un lado de un cuadrilátero de Brahmagupta que pasa por la intersección de las diagonales (que en estos cuadriláteros son ortogonales) biseca la cara opuesta».

Los versos 33 a 39 se refieren a la determinación de figuras con lados no irracionales a partir de números dados. Estos versos contienen reglas para construir ejemplos numéricos con figuras rectilíneas, basadas en números concretos. Aunque Brahmagupta no lo mencionara explícitamente, todas las fórmulas producen valores racionales para los lados, alturas y otras longitudes. Las figuras incluyen triángulos (isósceles, escalenos o rectángulos), trapecios (isósceles o triiguales, esto es, con tres lados iguales) y cuadriláteros escalenos. El objetivo es facilitar a los matemáticos que puedan abordar problemas geométricos que no incluyan *karanis*, es decir, cantidades irracionales o raíces de números que no son cuadrados perfectos. Así se evita el cálculo con estos números en el capítulo 12 (*ganita*), cálculo que sí aborda el capítulo 18 (*kuttaka*), en los versos 37-39, tal como se ha explicado ya.

Por ejemplo, un cuadrilátero escaleno se puede considerar como formado por dos triángulos rectángulos que tienen una hipotenusa común. Nótese también que no todos los cuadriláteros cíclicos se descomponen en dos triángulos rectángulos, aunque sí en dos triángulos.

Brahmagupta observó, para los cuadriláteros cíclicos que se pueden descomponer en dos triángulos rectángulos, que cabe obtener estos pares de triángulos multiplicando todos los lados de un determinado triángulo rectángulo por la hipotenusa del otro, y viceversa. Esto producirá dos nuevos triángulos, cada uno de ellos con hipotenusa igual al producto de las hipotenusas originales. Nótese que, en cada caso, el cuadrilátero resultante será cíclico, con una diagonal igual al diámetro del círculo que lo circunscribe, porque la yuxtaposición de dos triángulos rectángulos con una hipotenusa común se inscribe en el mismo semicírculo.

Los valores no irracionales para los lados de los triángulos rectángulos que se deben utilizar en estas construcciones son descritos con reglas equivalentes a las fórmulas siguientes, donde m y n son cantidades arbitrarias dadas (presumiblemente ambas enteras o fraccionarias).

Para determinar el lado b y la hipotenusa c de un triángulo rectángulo con a dado y usando un valor arbitrario m, se siguen la reglas siguientes:

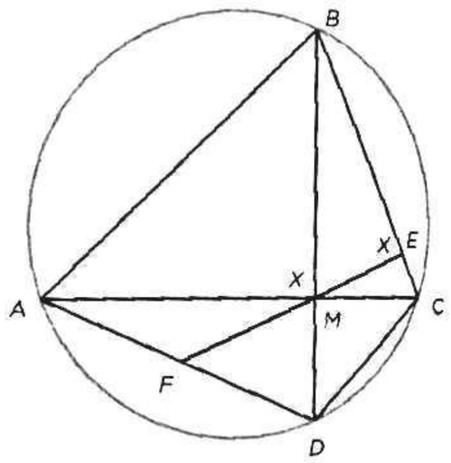
$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m} - m\right), \quad c = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m} + m\right).$$

Para determinar los lados a, b, c de un triángulo rectángulo se siguen las reglas siguientes, con m y n arbitrarios:

$$a = mn, \quad b = m + \frac{mn}{n+2}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE BRAHMAGUPTA

En geometría euclídea, el teorema de Brahmagupta da una condición necesaria sobre la perpendicularidad de las diagonales de un cuadrilátero cíclico (inscriptible en un círculo). El enunciado del teorema es el siguiente: «Si las diagonales de un cuadrilátero cíclico son perpendiculares, entonces toda recta perpendicular a un lado cualquiera del cuadrilátero y que pase por la intersección de las diagonales, divide al lado opuesto en dos partes iguales». Tenemos que probar que *AF = FD*. Lo que haremos será probar que *AF = FM* y que *FD = FM*. Para ver que *AF = FM*, lo primero que se debe observar es que los ángulos *FAM* y *CBM* son iguales, porque son ángulos inscritos en un círculo que abarcan el mismo arco del círculo, esto es *CD*. Además, los ángulos *CBM* y *CME* son iguales porque *CBM = EBM*, y este es complementario de *BME*, pero a su vez *CME* es complementario de *BME*, por tanto *CME* es igual a *CBM* (todos ellos con el símbolo *x* en la figura). Finalmente, los ángulos *CME* y *FMA* son iguales (el ángulo *FMA* también marcado con *x* en el dibujo). Por tanto, *AFM* es un triángulo isósceles, porque tiene dos ángulos iguales: *FMA* y *FAM*. La prueba sirve para ver que *FD = FM* es similar a los ángulos *FDM*, *BCM*, *BME* y *DFM* son iguales, y, por tanto, *DFM* es un triángulo isósceles con dos ángulos iguales *FDM* y *DFM*. De todo ello se deduce que *AF = FD*.



Teorema de Brahmagupta.

GEOMETRÍA. ÁREA Y CUERDAS DE UN CÍRCULO

Los versos 40 a 43 se refieren al área y cuerdas de un círculo. En ellos, Brahmagupta estableció fórmulas aproximadas y fórmulas exactas para calcular la longitud y el área de la circunferencia. Así, si C es la circunferencia (se debe entender como su longitud) y A es su área, se establece de forma aproximada que:

$$C \approx 3 \cdot 2r, \quad A \approx 3r^2,$$

y de forma exacta:

$$C = \sqrt{10}\, 2r, \quad A = \sqrt{10}\, r^2.$$

Nótese que $\sqrt{10} = 3{,}16227766\ldots$ es la aproximación de Brahmagupta al valor de π, aunque seguramente conocía la aproximación del *Aryabhatiya*, en donde π se aproxima por $62\,832/20\,000 = 3{,}1416$. Estos versos presentan una ampliación de las reglas para cuerdas y flechas, similares a las que se encuentran en el *Aryabhatiya*.

GEOMETRÍA. CÁLCULO DE VOLÚMENES

Los versos 44 a 46 se refieren a «excavaciones». En ellos se trata de forma breve el cálculo de volúmenes.

Los citados versos enuncian reglas para calcular el volumen de una excavación con paredes verticales (esto es, aquellas que tienen un volumen múltiplo del área de la base); también el volumen de «agujas» o sólidos piramidales (de volumen un tercio del área de la base por la altura), y el volumen de troncos de pirámides en los que la base mayor y la menor son cuadrados de diferentes medidas. Si la profundidad es h, el lado de la base menor es s_1 y el lado de la base mayor es s_2, la regla de Brahmagupta para calcular el volumen se corresponde con la expresión siguiente:

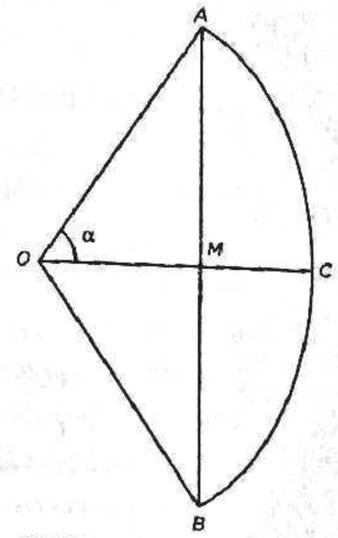
$$V = h \cdot \left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(h \cdot \frac{s_1^2 + s_2^2}{2} - h \cdot \left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right)^2\right).$$

El verso 47 se refiere a «pilas» o «montones». Es el quinto procedimiento enunciado al principio del capítulo, sobre las pilas

LA TERMINOLOGÍA DE *CUERDAS* Y *FLECHAS* EN LA TRIGONOMETRÍA INDIA

En la imagen del arco, *ACB* es el «arco» (*capa*) de un guerrero y el segmento *AMB* la «cuerda del arco» (*samasta-jya*). En ella se encuentran las posibles fuentes de los términos usados en la trigonometría india.

En los estudios de las funciones trigonométricas, y en particular en la elaboración de las tablas de valores de los senos, los astrónomos matemáticos indios usaron la semicuerda (por ejemplo, el segmento *AM* o *MB*), llamada *jya-ardha*; más tarde la abreviaron como *jya*, para convertirse en el seno indio. Asimismo se desarrollaron tres funciones, que en los términos actuales y tomando como referencia la figura anterior serían:



El arco.

$$jya\,\alpha = AM = r\,\text{sen}\,\alpha$$

$$kojya\,\alpha = OM = r\cos\alpha$$

$$ukramajya\,\alpha = MC = OC - OM = r - r\cos\alpha = r(1 - \cos\alpha) = r\,\text{sen verso de}\,\alpha.$$

de ladrillos y se trata brevemente en un solo verso. El volumen de una pila, se dice, es el área de la base tantas veces como la altura, o la media de las anchuras en la parte superior e inferior tantas veces como la altura y la longitud.

Los versos 48 y 49 se refieren al «aserrado». El sexto procedimiento describe ritmos de trabajo estandarizados para serrar tablones rectangulares de diferentes tipos de madera. El ritmo depende del área total de la superficie cortada y del tipo de madera.

Los versos 50 y 51 se refieren a «montones». El séptimo procedimiento describe la metrología de diferentes tipos de grano en montones que acaban siendo cónicos. El volumen de un montón, se dice, es igual en todos los casos a la altura, tantas veces como el cuadrado de una sexta parte de la circunferencia. Esto es equi-

valente a la fórmula estándar para el volumen V del cono de altura h y base de radio r: $V = h\pi r^2/3$, si se considera π igual a 3.

LA TRIGONOMETRÍA DE BRAHMAGUPTA

Según el Diccionario de la Lengua Española, la trigonometría es el estudio de las relaciones numéricas entre los elementos que forman los triángulos planos y esféricos. Conviene recordar en este punto cuál era la definición de seno en la trigonometría india y también en qué unidades se medía. A partir de un círculo, el «seno indio» de un determinado ángulo es la media cuerda del ángulo doble, tal como se muestra en la figura 3. Si el radio es 1, la medida coincide con el seno actual del ángulo para un ángulo comprendido entre 0° y 90°, y toma un valor comprendido entre 0 y 1, ya que se trata del cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa 1.

Sin embargo, en la trigonometría india se operaba con otras unidades. La idea era trabajar con radios grandes para poder hacer particiones e interpolaciones con números enteros. Se tomaba como unidad de longitud, la longitud de un arco de circunferencia de un minuto de ángulo. Con estas unidades, la longitud de la circunferencia, que tiene un ángulo de 360°, es:

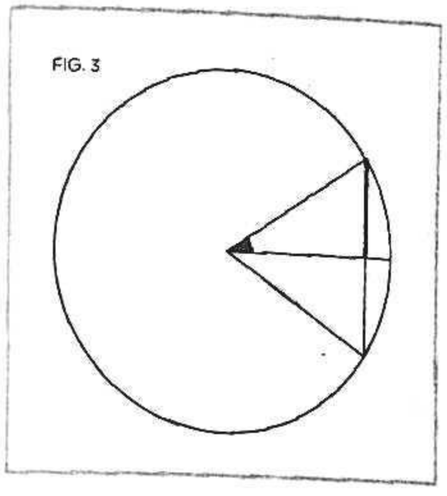
$$360 \cdot 60 = 21\,600,$$

con lo cual, el radio será

$$R = \frac{21\,600}{2 \cdot \pi}.$$

Según el valor que se tome para π se obtienen diferentes radios. Aryabatha usaba un radio de 3438 unidades, porque tomaba como aproximación de

$$\pi \approx \frac{68\,322}{20\,000}.$$



El seno indio.

En cambio, Brahmagupta, en el verso 16 del capítulo 12 del *Brahama-sphuta-siddhanta*, introdujo otro valor: «Puesto que el radio en minutos de una rotación se expresa en minutos y no en segundos, los senos son aproximados. Por esta razón yo tomo otro radio». Este otro radio era 3270, y el verso anterior sugiere que Brahmagupta lo eligió porque creía que produciría senos más exactos que los que se obtenían con otros radios. Así, trabajar con radio r de 3438 o de 3270 significa que la relación entre el seno indio (*jya*) y el seno actual que usa el radio 1, viene dada por la equivalencia siguiente:

$$jya\,\alpha = r \cdot \sin\alpha.$$

LOS MANUALES

Los *siddhantas* no fueron los únicos textos utilizados por los astrónomos indios. Para mayor comodidad, los astrónomos desarrollaron otro género: el de los *karana* o «manuales». Estos libros, más concisos que los *siddhantas*, tenían una estructura parecida pero con métodos más simplificados. En particular, el *karana* (literalmente, «fabricación») especificaba posiciones planetarias de épocas recientes, por lo general fechas dentro de la vida del propio autor, en lugar de utilizar el inicio del *kalpa* o del *Kaliyuga* como su punto cero. La ventaja de considerar una fecha más reciente era que entonces se manejaban números más pequeños para el *ahargana* (el número de días civiles transcurridos desde el inicio de la era escogida). Además, en la corrección de las posiciones de planetas para fechas recientes, los cálculos basados en los *karanas* fueron más precisos.

El primer texto *karana* que ha sobrevivido hasta nuestros días es de Brahmagupta, el *Khanda-khadyaka* («comiendo dulces», aparentemente un alarde de la dulzura y facilidad de los métodos

en contraposición a los expuestos en los *siddhantas*), escrito en 665. Por qué Brahmagupta tuvo necesidad de escribir un texto que utilizaba algunos de los parámetros de otros autores —y que tanto había criticado en su primera obra, el *Brahma-sphuta-siddhanta*— es algo que todavía no está claro.

«Puesto que los procedimientos prescritos por Aryabhata son impracticables para el día a día de los cálculos astrológicos para bodas, horóscopos a partir de fechas de nacimientos, etc., se establece un sistema más fácil».

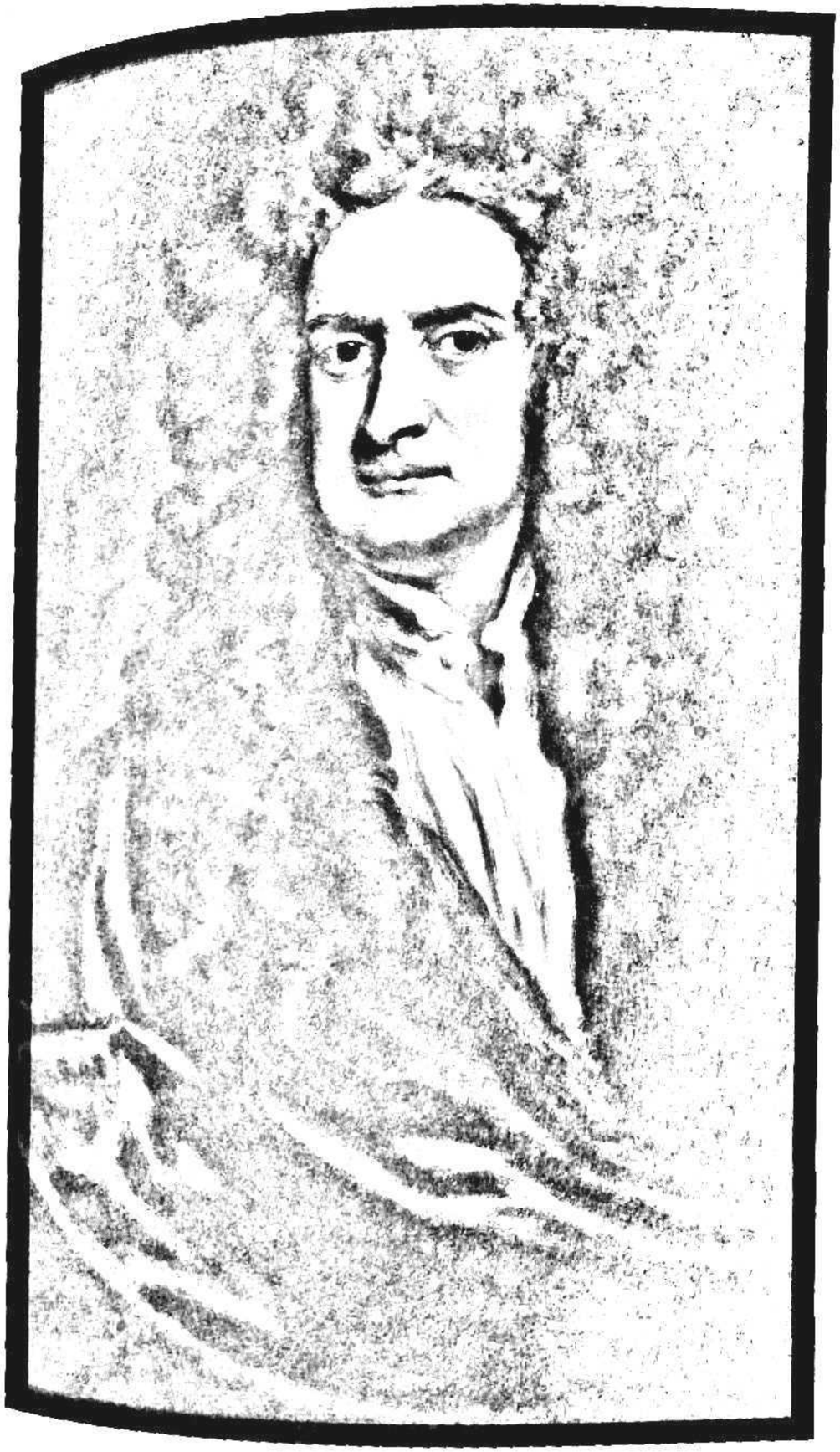
— BRAHMAGUPTA, EN *KHANDA-KHADYAKA*.

Un ejemplo de esta simplificación es el hecho de que el autor no utilizara una tabla de senos con veinticuatro valores, como había hecho Aryabatha —y él mismo— en el *Brahma-sphuta-siddhanta*, sino una tabla de seis valores y una fórmula para interpolar los valores necesarios.

LA CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE SENOS

Al final del capítulo 12, dedicado a la aritmética, Brahmagupta había dejado dicho que el resto de las explicaciones sobre cálculos estaba en las discusiones sobre el pulverizador (capítulo 18) y en las construcciones del seno (capítulo 21). Este último tema aparece justamente en los versos 17 a 23 del capítulo 21, en los que se trata la esfera. Tales construcciones se basan en indicaciones concisas para determinar geométricamente los valores de los senos. Igual que Bhaskara I en sus comentarios del *Aryabhatiya* (capítulo 2, verso 11), Brahmagupta resolvió triángulos rectángulos inscritos en el círculo utilizando el teorema de Pitágoras para encontrar unos valores de senos a partir de otros conocidos, y dio veinticuatro valores de senos entre 0° y 90°.

Cabe preguntarse por qué las tablas de senos contienen veinticuatro valores y no veinticinco, por ejemplo. Como ya se ha dicho al introducir las unidades de estas tablas, la unidad de longitud es



El físico y matemático inglés Isaac Newton, quien aparece retratado por Godfrey Kneller, fue uno de los grandes científicos de la historia, y desarrolló un procedimiento matemático para interpolación con diferencias de segundo orden muy similar al de Brahmagupta.

COMPARACIÓN ENTRE LOS SENOS DE BRAHMAGUPTA, LOS DE ARYABHATA Y LOS ACTUALES

En la tabla siguiente se indican los valores de las tablas del seno indio del *Brahma-sphuṭa-siddhanta* de Brahmagupta, los valores del seno indio en el *Aryabhatiya* de Aryabhata, y las traducciones respectivas al seno actual, esto es, dividiendo los valores por el radio correspondiente y también el valor actual del seno. Las tres columnas centrales de la tabla dan una idea clara de la corrección de las tablas de los dos autores indios, ya que en casi todos los casos los valores coinciden en los cuatro primeros decimales.

Grados	Brahmagupta	B/3270	valor actual	A/3438	Aryabhata
3° 45′	214	0,065443425	0,065403129	0,065445026	225
7° 30′	427	0,13058104	0,130526192	0,130599186	449
11° 15′	638	0,195107034	0,195090322	0,195171611	671
15° 00′	846	0,258715596	0,258819045	0,258871437	890
18° 45′	1051	0,321406728	0,321439465	0,321407795	1105
22° 30′	1251	0,382568807	0,382683432	0,38248982	1315
26° 15′	1446	0,442201835	0,44228869	0,44211751	1520
30° 00′	1635	0,5	0,5	0,5	1719
33° 45′	1817	0,555657492	0,555570233	0,555555556	1910
37° 30′	1991	0,608868502	0,608761429	0,608784177	2093
41° 15′	2156	0,659327217	0,659345815	0,659394997	2267
45° 00′	2312	0,707033639	0,707106781	0,70709715	2431
48° 45′	2459	0,751987768	0,751839807	0,751890634	2585
52° 30′	2594	0,793272171	0,79335334	0,793484584	2728
56° 15′	2719	0,831498471	0,831469612	0,831588133	2859
60° 00′	2832	0,866055046	0,866025404	0,86620128	2978
63° 45′	2933	0,896941896	0,896872742	0,897033159	3084
67° 30′	3021	0,923853211	0,923879533	0,92408377	3177
71° 15′	3096	0,946788991	0,946930129	0,947062245	3256
75° 00′	3159	0,966055046	0,965925826	0,965968586	3321
78° 45′	3207	0,980733945	0,98078528	0,980802792	3372
82° 30′	3242	0,991437309	0,991444861	0,991564863	3409
86° 15′	3263	0,997859327	0,997858923	0,997963933	3431
90° 00′	3270	1	1	1	3438

la longitud de un arco de circunferencia de ángulo de un minuto. Se toma como primer seno la octava parte de los minutos del signo zodiacal, esto es, $S_1 = 30°/8 = 1800'/8 = 225'$, donde 30° se obtiene de dividir los 360° de la circunferencia entre 12, el número de signos del zodíaco.

En cambio, en el *Khanda-khadyaka*, Brahmagupta utilizó un radio de 150 unidades y dio solo seis valores iniciales en las tablas de senos, para el mismo intervalo de antes de 0° a 90°, indicando que los valores intermedios se calculasen mediante una fórmula de interpolación que usaba las primeras y segundas diferencias entre los seis valores del seno que contiene la tabla.

LA FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN DE NEWTON-STIRLING Y SU COMPARACIÓN CON LA DE BRAHMAGUPTA

Si la fórmula de interpolación de Brahmagupta en el *Khanda-khadyaka*, en notación actual, es

$$\frac{\Delta\theta}{h}\left(\frac{D_{p+1}+D_p}{2}+\frac{\Delta\theta}{h}\frac{D_{p+1}-D_p}{2}\right),$$

y la fórmula de Newton-Stirling —atribuida a los británicos Isaac Newton (1643-1727) y James Stirling (1692-1770)— para interpolación con diferencias de segundo orden viene expresada actualmente como:

$$f(a+xh) = f(a) + x\frac{\left[\Delta f(a)+\Delta f(a-h)\right]}{2} + \frac{x^2\Delta^2 f(a-h)}{2!}.$$

Se puede ver la equivalencia entre ambos procedimientos si se observa que Δ es el operador de la diferencia de primer orden (esto es, la columna de los valores D_p en la tabla de senos de Brahmagupta en el *Khanda-khadyaka*), 2 es el operador de diferencia de segundo orden (esto es la columna de los valores de

$$D_{(p+1)} - D_p$$

en la misma tabla y $x = \Delta\theta/h$).

Khanda-khadyaka es una obra en ocho capítulos donde se tratan otra vez temas ya expuestos en el *Brahma-sphuta-siddhanta*: las longitudes de los planetas; los tres problemas de la rotación diurna; los eclipses lunares; los eclipses solares; las salidas y puestas; la luna creciente; y las conjunciones de los planetas. Contiene un apéndice que en algunas versiones solo tiene un capítulo y en otras tres.

Parece ser que Brahmagupta escribió esta obra en forma de manual para simplificar algunos de los procedimientos y cálculos que utilizaba en su *Brahma-sphuta-siddhanta*. En particular, de la tabla de veinticuatro valores de senos que propone en el capítulo 21 de su primera obra, pasa a solo seis en *Khanda-khadyaka*.

Más adelante, en el capítulo noveno se indica cómo interpolar los senos de los ángulos intermedios a partir de una tabla de senos que los estudiosos del tema han concluido que es un caso particular de la fórmula de interpolación Newton-Stirling para segundo orden.

A título de ejemplo se puede usar la fórmula de interpolación de Brahmagupta para hallar el seno de 67°:

El intervalo es: $h = 15^\circ$ o $900'$
El ángulo residual es: $\Delta\theta = (67^\circ - 60^\circ) = 7^\circ$ o $420'$
Los valores relevantes tabulados son: $D_p = 24$, $D_{(p+1)} = 15$

Utilizando la fórmula de interpolación legada por Brahmagupta se obtiene:

$$\frac{7}{15}\left[\frac{15+24}{2}+\frac{7}{15}\left(\frac{15-24}{2}\right)\right]=8{,}12,$$

y de aquí

$$\text{seno } 67^\circ = 130 + 8{,}12 = 138{,}12.$$

Si este valor se divide entre 150, el valor del radio usado por Brahmagupta en el *Khanda-khadyaka*, el valor del seno es de *0,9208*. Si se tiene en cuenta que el valor actual del seno 67°, en la aproximación con ocho dígitos de cualquier calculadora científica, es *0,920504853*, se puede concluir que el valor calculado con la fórmula de interpolación ideada por Brahmagupta es una muy buena aproximación.

CAPÍTULO 5

La astronomía

A partir del siglo V, la tradición de los textos astronómicos indios, los *siddhantas*, se diversificó en escuelas diferentes o *paksas*. Brahmagupta siguió la escuela de *Brahma* o *Brahma-paksa* y fue crítico con otros astrónomos, sobre todo con Aryabhata. Además, introdujo mejoras en los cálculos de las posiciones verdaderas de los planetas y los eclipses, y redactó un útil manual de carácter práctico.

En la antigua India, la astronomía estuvo inicialmente entretejida con la religión. Los textos más antiguos de la literatura india, los *Vedas*, que se remontan al tercer milenio antes de Cristo, reflejan la fascinación que los cuerpos celestes ejercieron sobre los sacerdotes hindúes; se mencionan profesiones como *ganaka* (calculador) y *naksatra-darsa* (observador de estrellas), y también una rama del conocimiento denominada *naksatra-vidya* (ciencia de las estrellas). Los textos védicos eran obras de naturaleza religiosa, pero informaban sobre conocimientos astronómicos, básicamente de carácter empírico, aunque también formularon especulaciones sobre la génesis del universo.

El auxiliar astronómico de los Vedas, *Vedanga Jyothisa*, estableció medidas de tiempo, constantes astronómicas pensadas para ser dadas a través de números enteros y favorecer su memorización, tablas, metodologías y otros elementos relacionados con el calendario y los rituales védicos.

Tiempo después se escribieron una serie de textos astronómicos, fragmentos de los cuales fueron citados en obras posteriores. Cinco de estos textos perdidos fueron redactados por Varahamihira en su *Panchasiddhantika*, el tratado de *Los cinco cánones astronómicos*. En general cabe decir que la astronomía contenida en los textos posteriores fue prácticamente similar a la expuesta en el *Vedanga Jyothisa*, con pequeñas diferencias, hasta la llegada de los

textos *siddhantas* con su perspectiva y metodología más racionalista y un alcance mucho más amplio.

LA TRADICIÓN ASTRONÓMICA DE LOS *SIDDHANTAS*

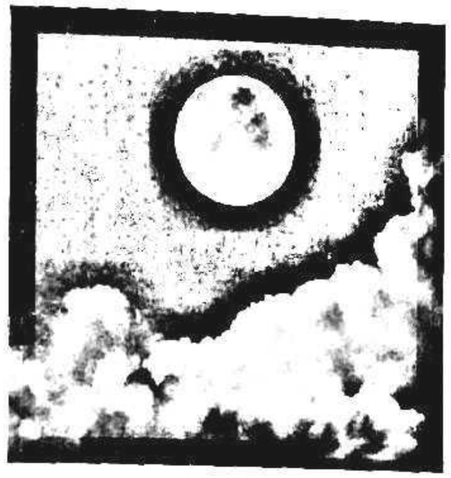
Alrededor del siglo V, los antiguos textos astronómicos indios fueron sustituidos por tratados escritos en un formato más comprensivo, los *siddhantas*. La versión más generalizada utilizaba una forma típica de versos concisos de género didáctico, y estaba escrita en sánscrito clásico. Estos tratados no siempre eran fáciles de entender, y por eso el texto base resultaba en la práctica inseparable de los comentarios. La forma habitual de presentación era oral. Hubo también comentarios en prosa, escritos a veces por el propio autor del *siddhanta* o por comentaristas posteriores.

Los comentarios podían definir o aclarar palabras específicas del texto, analizar la construcción gramatical, detallar de manera más minuciosa las fórmulas de cálculo que resultasen ambiguas, suministrar ejemplos para ilustrar las fórmulas o, en ocasiones, dar razonamientos matemáticos o demostraciones de las mismas. En general, los *siddhantas* no contenían diagramas geométricos y estos casi nunca aparecen en los manuscritos.

Básicamente fueron tres los objetivos perseguidos por estos *siddhantas*. El primero consistió en una astronomía predictiva, en el sentido de calcular tiempos, localizaciones y apariencias de fenómenos celestes, tanto futuros como pasados, tal como se observan desde un lugar determinado de la Tierra. El segundo, la «astronomía computacional», es decir, la explicación de los procedimientos de los cálculos astronómicos en términos de la geometría de los modelos esféricos subyacentes a ellos; tales explicaciones aparecían a menudo en una sección especial denominada *gola*, palabra que en sánscrito significa «esfera». El tercer objetivo estuvo enfocado a «la instrucción en el conocimiento matemático general», para lo cual se mostraban desde operaciones aritméticas básicas a cálculos de intereses sobre préstamos y reglas para encontrar áreas, volúmenes o sumas de series.

RECORRIDOS DE LA LUNA Y EL SOL. *NAKSATRAS* Y *RASIS*

En el recorrido aparente de la Luna por la esfera celeste, el satélite terrestre va atravesando constelaciones denominadas por la astronomía y la astrología hindúes como *naksatras* («mansiones lunares»). En el *Veganga Jyotisha*, considerado el primer texto indio dedicado exclusivamente a la astronomía, ya aparece una lista de veintisiete *naksatras* que se relacionan con el tiempo que toma la Luna para volver a la misma posición entre las estrellas fijas (el mes sidéreo, que es de 27 1/3 días). Una *naksatra* cubre un arco de la eclíptica de 13º 20' (360º/27 = 13º 20') y tanto este arco como el intervalo de tiempo que tarda la Luna en atravesarlo también se denominan *naksatra*. Cada *naksatra* se divide en cuatro partes iguales de 3º 20' (*padas*). El sistema de *naksatras* parece ser anterior a la influencia helenística en la tradición védica. Por otro lado, en la astronomía india tradicional, los 360º del recorrido aparente del Sol, la eclíptica, se dividieron en doce partes de 30º. Cada una de ellas se denominó *rasi* o *rashi* (signo zodiacal).



Los movimientos de la Luna despertaron la atención de los primeros astrónomos y fueron estudiados por personajes como Brahmagupta. En la imagen, la Luna fotografiada desde el hemisferio norte de la Tierra.

UNA VISIÓN DEL UNIVERSO

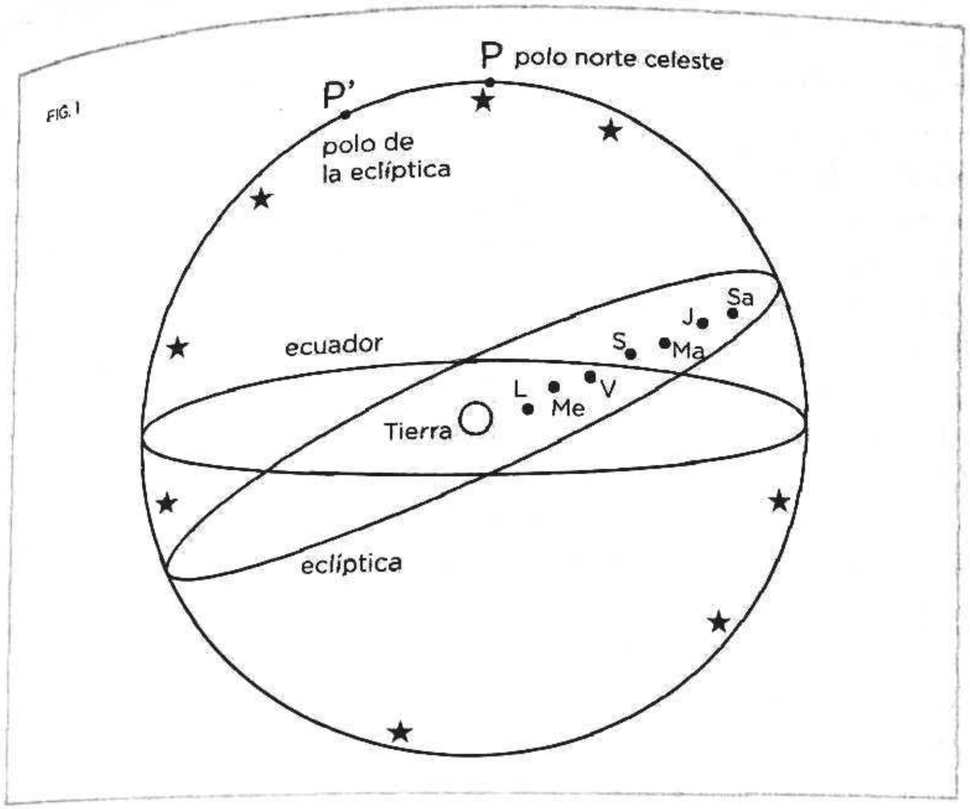
Un primer tratado importante de los *siddhantas* estándar parece haber sido el *Paitamaha-siddhanta*, compuesto probablemente a principios del siglo V (que no se debe confundir con la obra del mismo nombre del siglo I resumida en el *Panchasiddhantika*); ha sobrevivido en forma fragmentaria como parte de otro texto. Se estructura como un diálogo entre el dios Brahma y el sabio Bhrigu (o Bhrgu, en sánscrito). El sabio afirma que «la ciencia de las estrellas es difícil de entender sin cálculos» y pide a Brahma que le enseñe el cálculo. Igual que en el antiguo *Vedanga Jyotisha*, esta

obra insiste en la importancia de realizar los rituales védicos en fechas precisas y destaca el interés por el cómputo del tiempo.

La visión india del universo en esta época era geocéntrica. Cabe resumirla diciendo que, igual que hicieron los griegos, se considera la Tierra como esférica, inmóvil y situada en el centro de una superficie esférica donde se encuentran, fijas, las estrellas. Esta esfera celeste o «esfera estelar» gira diariamente de este a oeste en torno a un eje que pasa por el centro de la Tierra y el polo norte celeste (un punto que coincide prácticamente con la estrella polar). El giro diario de la esfera celeste representa el paso del tiempo, y, así, este giro se puede medir tanto en unidades ordinarias de tiempo como a través de tiempo grados de arcos a lo largo del ecuador de la esfera celeste. El tiempo que tarda la esfera en realizar una revolución completa *naksatra dina* (día sidéreo) es del orden de 23 horas y 56 minutos, unos cuatro minutos menos que el *savana dina* (día civil o día solar), tiempo que tarda el Sol en hacer un giro alrededor de la Tierra (veinticuatro horas).

A simple vista vemos siete astros que se desplazan entre las estrellas y no mantienen distancias angulares constantes con ellas. Se trata de los «siete planetas»: la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter y Saturno. Parecen acompañar a las estrellas en su recorrido diario de este a oeste, aunque una observación más precisa muestra que poseen un movimiento propio, aparentemente más lento, en dirección este a través de la franja de las constelaciones del Zodíaco. La trayectoria de este lento recorrido aparente anual del Sol entre las estrellas en dirección este es la «eclíptica». El plano del ecuador de la esfera celeste («ecuador celeste») y el plano de la eclíptica forman un ángulo de algo menos de 24° (unos 23° 27'). Además, los llamados «pequeños planetas» (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno) presentan retrogradaciones, es decir, en ocasiones parecen detenerse en su movimiento, brillan más y retrogradan —van hacia el oeste— para más tarde continuar con su movimiento propio y habitual hacia el este.

El movimiento medio de un planeta se refiere a la velocidad angular promedio de su revolución alrededor de la Tierra. Cada órbita planetaria individual se compone de una combinación compleja de círculos para dar una explicación geométrica de su trayectoria aparente hacia el este, teniendo en cuenta también sus variaciones de velocidad, brillo y tamaño. Estos círculos pueden ser excéntricos (es decir, no centrados en la Tierra) o pueden ser un «epiciclo» (donde podemos pensar situado el planeta), cuyo centro gira a su vez sobre otro círculo («deferente») y en dirección este. El círculo de la órbita de un planeta distinto del Sol interseca la eclíptica en puntos denominados «nodos»; por otro lado, en una órbita no concéntrica con la Tierra se hallan los «ápsides» o puntos de mayor y menor distancia a la Tierra (el apogeo y el perigeo, respectivamente).



El universo geocéntrico de los antiguos astrónomos hindúes.

EL CÁLCULO DE LAS POSICIONES ASTRALES

En el *Paitamaha-siddhanta*, para calcular las posiciones medias de los cuerpos celestes, sus nodos y ápsides, así como las correspondientes medidas de tiempo, el dios Brahma enseña el uso de

grandes números enteros. Así, el tiempo queda ligado a conceptos cosmológicos del hinduismo como el *kalpa*, período entre creación y recreación de un mundo o universo (la vida del universo actual) y es igual a 4 320 000 000 años. Un *kalpa* —solo un día en la vida de Brahma— equivale a 1 000 *mahayugas* o 10 000 *kaliyugas*; además, se dividen en una secuencia de catorce eras llamadas *manvataras*, compuestas de ciclos de setenta y un *mahayugas* cada una. Así, cada *manvatara* suma 306 720 000 años. Precediendo a la primera era *manvatara* y después de cada una de ellas hay unos períodos intermedios de 1 728 000 años de duración cada uno.

Se considera que en un *kalpa*, todos los objetos celestes completan un número entero de revoluciones alrededor de la Tierra (en particular los siete planetas, entendidos en el sentido original antiguo mencionado, que incluye tanto al Sol como a la Luna, los ápsides y nodos ascendentes de sus órbitas y la esfera de las estrellas fijas). Todos ellos empiezan juntos a partir de una gran conjunción, en el punto cero de longitud y latitud celestes o al principio de la eclíptica. Así, el inicio del *yuga* (o *kalpa*) se basó en fenómenos astronómicos relacionados con las posiciones de los planetas en el firmamento.

En teoría, la comprensión de este sistema permite al astrónomo predecir cada acontecimiento astronómico en cada momento de la vida del universo.

En el caso del *Paitamaha-siddhanta*, no identifica ningún momento en este largo período cósmico con un acontecimiento histórico concreto, detalle que lo habría hecho útil a efectos de cálculo. En general, los *siddhantas* posteriores supusieron que nuestra época actual correspondía al *Kaliyuga* (última de las cuatro eras en un *mahayuga*) del veintiochoavo *mahayuga* del séptimo *manvantara* del *kalpa*; y se estableció que el *Kaliyuga* actual empezó con la legendaria batalla de Kurukshetra, descrita en el extenso poema épico del *Mahabharata*. La fecha tradicional en la que se dató este combate fue el 18 de febrero de 3102 a.C.

Así, el punto cero de tiempo usado para los cálculos de un *siddhanta*, a veces se tomó de manera que fuese un punto inicial del actual *Kaliyuga*, más bien que el punto de inicio del *kalpa*.

LA ASTRONOMÍA DEL *ARYABHATIYA*

Para hacernos una idea de la situación de la astronomía india en la época de Brahmagupta conviene tener presente la importante contribución realizada por Aryabhata en esta disciplina.

La gran influencia de Aryabhata (siglos V-VI) como astrónomo no se limitó solamente a su propia época, sino que perduraba aún en la época de Brahmagupta (siglo VII), quien hizo referencia en sus escritos de la autoridad de aquél, ya fuese utilizando, contradiciendo o mejorando sus cálculos.

Ya se mencionó que solo ha llegado hasta nosotros una obra astronómica de Aryabhata, el *Aryabhatiya*. El segundo capítulo de este tratado (*ganita-pada*) trata básicamente de matemáticas. En los otros tres se encuentra el contenido astronómico.

CÓMO MEDIR EL TIEMPO ASTRONÓMICO

En el primer capítulo, *gitika-pada*, Aryabhata estableció definiciones básicas, parámetros astronómicos y tablas. Dio definiciones de las grandes unidades de tiempo (*kalpa*, *manvatara* y *yuga*), las unidades circulares (signos zodiacales, grados, minutos) y unidades lineales (*yojana*, *hasta* y *angula*). Enunció el número de rotaciones de la Tierra y el de revoluciones del Sol, la Luna y los pequeños planetas en un período de un *mahayuga*; indicó el tiempo y lugar desde que se suponía iniciado el movimiento de los planetas, al principio del actual *yuga*, así como el tiempo transcurrido desde el inicio de la actual *kalpa* hasta el principio del *Kaliyuga*; suministró las posiciones de los apogeos (puntos más alejados) y los nodos ascendentes de los planetas en su época, de las órbitas del Sol, de la Luna y los planetas, así como los diámetros de la Tierra, el Sol y la Luna; calculó la oblicuidad de la eclíptica y la inclinación respecto de la eclíptica de las órbitas de la Luna y los planetas; se refirió a los epiciclos de los diferentes planetas y construyó las tablas del *Jya* (la función trigonométrica del seno indio).

En el tercer capítulo, Aryabhata correlacionó la división del tiempo con la división *ksetra*, es decir, la división angular del cír-

UNIDADES DE TIEMPO QUE APARECEN EN EL *ARYBHATIYA*

En el *kalakriya-pada*, tercer capítulo del *Aryabhatiya*, el astrónomo y matemático indio Aryabhata enumeró diversas unidades de tiempo y sus divisiones:

un año (*vasa*) = doce meses (*masa*)
un mes = treinta días (*divasa*)
un día = sesenta *nadis*
un *nadi* = sesenta *vinadi*.

Así pues, un *nadi* o *nadika* o *ghati* venía a ser veinticuatro minutos, pues 1 día = 24 x 60 minutos = 1440 minutos = 60 *nadis* y, por tanto, 1 *nadi* = 1440/60 minutos = 24 minutos. Razonando análogamente, un *vinadi* o *vinadika* o *vighatika* correspondería a veinticuatro segundos.

culo; así, indicó que igual que un año tiene doce meses, doce signos del zodíaco o *rasis* (un *rasi* corresponde a 30°) constituyen un *bhagana* (el círculo completo de 360°), y estableció las subdivisiones angulares siguientes:

1/12 *bhagana* = un *rasi* (es decir, 360°/12 = 30°)

1/30 *rasi* = un *bhaga* (es decir, 1°)

1/60 *bhaga* = un *lipta*

1/60 *lipta* = un *vilipta*

1/60 *vilipta* = un *tatpara*.

El tercer capítulo, *kalakriya-pada*, presenta las diversas unidades de tiempo y está dedicado a la determinación de las posiciones verdaderas del Sol, la Luna y los planetas para un día dado. Indica las divisiones del año (mes, día, etc.) y las divisiones angulares del círculo. Describe los diferentes tipos de año, mes y día;

define el principio del ciclo temporal, el llamado círculo del cielo y las velocidades angulares de los movimientos planetarios en términos de revoluciones. Explica el movimiento del Sol, la Luna y los planetas por medio de círculos excéntricos y epiciclos, y brinda el método para calcular las longitudes verdaderas del Sol, la Luna y los planetas.

GEOMETRÍA CELESTE

En el cuarto y último capítulo, *gola-pada*, Aryabhata se dedicó a los aspectos geométricos y trigonométricos de la esfera celeste. Describió los diversos círculos de la misma (eclíptica, ecuador celeste) e hizo referencia a los nodos, la forma de la Tierra, la causa del día y la noche, la salida de los signos zodiacales por el horizonte este, etc. En este capítulo describió también el movimiento de la esfera celeste vista por los que están en el ecuador, en el polo norte y en el polo sur de la Tierra. Dio reglas relacionadas con diversos problemas de astronomía esférica y trató con el cálculo y la representación gráfica de los eclipses y la visibilidad de los planetas.

En cuanto a los parámetros cosmológicos, parece ser que el *mahayuga* fue concebido por los astrónomos indios como un período en cuyo principio y final los cinco pequeños planetas (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno), junto con el Sol y la Luna, tienen una longitud celeste cero. Es decir, que todos ellos se encuentran simultáneamente en el gran círculo que pasa por el equinoccio vernal (punto de la eclíptica a partir del cual el Sol pasa del hemisferio sur celeste al hemisferio norte) y el polo de la eclíptica (punto de la esfera celeste donde interseca la línea perpendicular al plano de la eclíptica que pasa por el centro de la Tierra). En el *gitika-pada* del *Aryabhatiya* aparece la hipótesis de que, al principio del *yuga*, todos los planetas, junto con el apogeo de la Luna y el Sol, estaban en conjunción en el equinoccio vernal durante la salida del Sol en Lanka. El verso nueve del *gola-pada* indica: «Así como un pasajero en un barco que se mueve río abajo ve lo estacionario (árboles en las orillas del río) como atravesando río arriba, así también lo hace un observador en Lanka que ve las estrellas

fijas como moviéndose hacia el oeste exactamente a la misma velocidad» (a la que la Tierra se mueve del oeste hacia el este). Este Lanka, en el verso citado, no se refiere al moderno Sri Lanka. Denotaba un punto en el ecuador de la Tierra, al sur de Ujjain (23,09 N, 75,43 E), es decir, el punto en el que el meridiano de Ujjain (75.43 E) cruza el ecuador. Este punto se encuentra en el océano Índico, cerca de las islas Maldivas. Pero ¿por qué la referencia a Lanka? La elección de este lugar aseguraba que el observador viese la órbita de una estrella describiendo un círculo vertical desde el este al oeste.

Ujjain fue un gran centro de enseñanza y el meridiano que pasaba por Ujjain fue el primer meridiano o «meridiano cero» considerado por los astrónomos indios. Para Aryabhata fue natural seleccionar Lanka para representan un punto ecuatorial. De hecho, Lanka solía ser un punto de referencia estándar en la astronomía india. En el *Aryabhatiya*, el comienzo del actual *yuga* se calcula desde el amanecer en Lanka.

DIVERSIDAD DE ESCUELAS

Fue alrededor del siglo V, en la época del *Paitamaha-siddhanta*, cuando tuvo lugar una diversificación de la tradición de los *siddhantas* en escuelas o *paksas* distintas. Uno de los principales motivos de diferenciación se relacionaba con los parámetros usados para establecer las principales divisiones del tiempo y los ciclos celestes, aunque, más adelante, parece ser que todas las *paksas* se basaron en el sistema del *Paitamaha-siddhanta* o *Brahma-paksa*.

No siempre las razones para escoger un sistema u otro eran claras, aunque se aducía el deseo de máxima armonización entre los cálculos astronómicos y las tradiciones de los textos sagrados del hinduismo, los *Smriti* (o *Smrti* en sánscrito).

En términos generales, en el sur del subcontinente indio la tendencia fue adherirse a una *paksa* diferente de la que era favorita en el norte. Entre las escuelas existentes en la época de Brahmagupta hay que destacar la *Arya-paksa*, la *Ardharatrika-paksa* y la *Brahma-paksa*.

La *Arya-paksa* fue fundada por Aryabhata hacia el año 500. Introdujo modificaciones un tanto radicales en relación al sistema del *Paitamaha-siddhanta*. Asignó mil ocho *mahayugas* en vez de mil en un *kalpa*. En el *Aryabhatiya*, un *Kaliyuga* corresponde a un cuarto de un *mahayuga* en vez de a un décimo, y, al principio y al final de cada *Kaliyuga*, hay una conjunción de planetas —o al menos de sus posiciones medias— al comienzo de la eclíptica. Aryabhata, quien defendió que estaba siguiendo y restableciendo la astronomía de Brahma, introdujo un cambio en la estructura de un *siddhanta* estándar, pues su *Aryabhatiya*, tal como hemos indicado, tenía solo cuatro capítulos, dedicados a parámetros numéricos, cálculo en general, cálculo del tiempo y *gola* (o esfera), respectivamente.

Además de Aryabhata, otro miembro destacado de esta escuela fue el también conocido Bhaskara I, quien compuso dos *siddhantas*, el *Maha-bhaskariya* (o *Gran tratado de Bhaskara*) y el *Laghu-bhaskariya* (o *Tratado menor de Bhaskara*).

La escuela denominada *Ardharatrika-paksa* también fue fundada por Aryabhata en una obra hoy en día perdida. El nombre de la escuela deriva del término *ardharatra*, que significa «medianoche», y aunque es una escuela similar a la *Arya-paksa*, escogió su punto cero de tiempo de manera que tuviera lugar a medianoche en vez de a la salida del Sol. Aunque no se conservan *siddhantas* propios de esta escuela, sabemos que inspiró otra escuela posterior, la *Saura-paksa*, basada en un *Suryasiddhanta* de finales del siglo VIII o IX; el astrónomo Jnanaraja (siglo XVI) fue uno de sus miembros y autor del *Siddhantasundara* (o *Tratado bello*).

La *Brahma-paksa* es la más antigua de las escuelas y sostenía que era una revelación de la deidad india Brahma. El texto fundador de esta *paksa* es el mencionado *Paitamaha-siddhanta*, que sobrevivió de forma fragmentaria y corrompida dentro de una compilación mayor, la *Visnudharmottarapurana*. La principal obra de esta *paksa* después del *siddhanta* fundador fue el *Brahma-sphuta-siddhanta* (o *Siddhanta corregido de Brahma*) de Brahmagupta. Los seguidores de esta escuela fueron más numerosos en el oeste y noroeste del subcontinente indio. Bhaskara II escribió un importante texto asociado a esta *paksa*: el *Siddhantasiromani*.

«El cálculo de los planetas pronunciado por Brahma, que ha sido debilitado por un gran [lapso de] tiempo está [aquí] explicado correctamente por Brahmagupta hijo de Jisnu.»

— BRAHMAGUPTA, EN *BRAHMA-SPHUTA-SIDDHANTA*.

ASTRONOMIA EN EL *BRAHMA-SPHUTA-SIDDHANTA*

Brahmagupta fue muy crítico con Aryabhata, por haberse desviado este de las tradiciones de los textos sagrados, los *Smirti*, que se seguían en el *Brahma-paksa* original. En general, las críticas a trabajos rivales —a veces muy severas— aparecen de forma ocasional a través de los diez primeros capítulos astronómicos del *Brahma-sphuta-siddhanta*, y el capítulo 11, titulado *Tantrapariksadhyaya*, está totalmente dedicado a ellas.

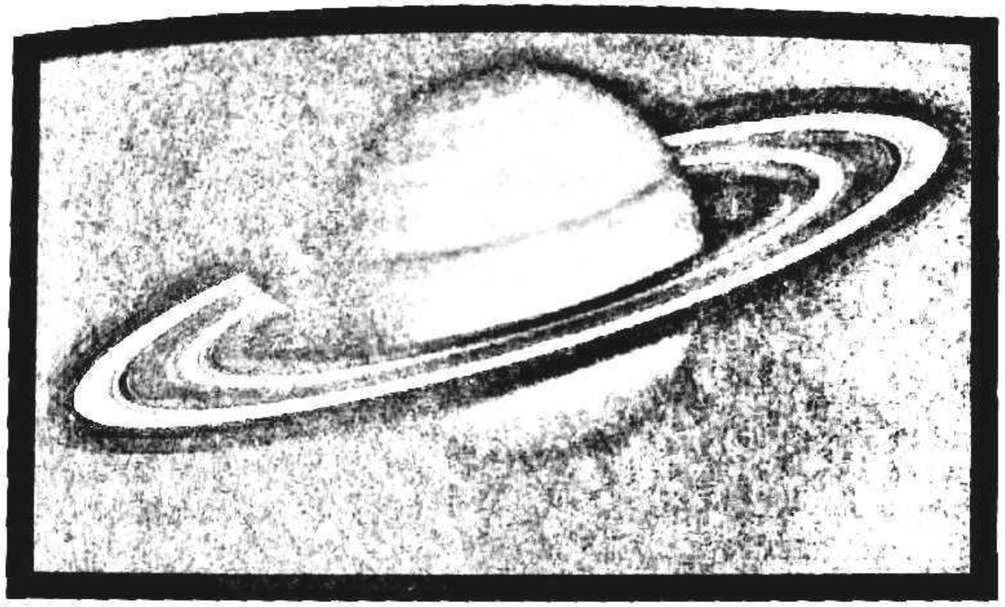
Críticas aparte, Brahmagupta mostró métodos ingeniosos para realizar cálculos precisos de problemas astronómicos con la ayuda de sus conocimientos matemáticos. Así, mejoró los cálculos de las longitudes verdaderas de los planetas. Dio, por ejemplo, la corrección *Natakarma* (para la circunferencia de un epiciclo) que condujo a resultados más correctos que los calculados a partir de los *Mandaparidhis* (circunferencias del primer epiciclo) tabulados, y que resultaron útiles para el cálculo de un eclipse. En el siglo XII, Bhascaracharya (o Bhaskara II) repitió esta corrección, por ejemplo en su *Suryasiddhanta* o su *Siddhanta-siromani*.

La correcciones dadas por Brahmagupta en el *Brahma-sphuta-siddhanta* del *Mandocca* (apogeo) y el *Sighraphala* (el paralaje anual) del planeta Marte, así como la aplicación del *Mandaphala* (la ecuación del centro) y el *Sighraphala* (el paralaje anual) para hallar su longitud media, se basaron estrictamente en la observación. Así lo remarcaron comentaristas posteriores como Prthudaka (siglo IX) y Bhaskara II (siglo XII). Este último repitió esta regla de Brahmagupta en algunas de sus obras, como el *Suryasiddhanta* o el *Siddhanta-siromani*.

En los versos 14 y 15 del capítulo 5 del *Brahma-sphuta-siddhanta*, Brahmagupta introdujo una corrección suya del *Lambana*

EL *YUGA* Y LOS *NAVAGRAHA*

En el lenguaje de la tradición astronómica india se habla de los *graha* (que se acostumbra a traducir por «planeta») o los *navagraha*, cuyo significado abarca no solo a los planetas, sino también los nodos lunares (puntos de intersección de las trayectorias aparentes de la Luna y el Sol). Así, los *navagraha* comprenden nueve objetos o posiciones celestes: el Sol (*Surya* o *Ravi*), la Luna (*Candra* o *Chandra*), Marte (*Kuja* o *Mangala*), Mercurio (*Bhuda*), Júpiter (*Guru* o *Brihaspati*), Venus (*Sukra*), Saturno (*Sani* o *Shani*), el nodo lunar ascendente (*Rahu*) y el nodo lunar descendente (*Ketu*).



El planeta Saturno (*Kuja* o *Mandala* para los hindúes) era uno de los *navagraha*.

(paralaje en longitud) en un eclipse solar que luego volvería a utilizar en el *Khanda-khadyaka* (capítulo 5, versos 5 y 6). Posteriormente, uno de los principales astrónomos indios del siglo VIII, Lalla (ca.720–790), copió este método en su *Sysyadhivrddhida* (o *Tratado que expande el intelecto de los estudiantes*). Lalla también utilizó un método propio de Brahmagupta, muy notable para el cálculo de la conjunción de planetas.

En la astronomía *siddhanta*, la primera tarea para calcular las posiciones de los cuerpos celestes era determinar su posición me-

día en un tiempo determinado. Esto significa conocer la posición que debería ocupar si el cuerpo estudiado girase en torno de la Tierra con movimiento circular uniforme sobre una órbita concéntrica. Estos movimientos medios se presentaban en forma de simples proporciones entre los grandes números enteros correspondientes a los ciclos completados en un *kalpa* o *yuga*.

Así, si un cuerpo completa R revoluciones enteras con velocidad constante en los D días de un *kalpa* o *magayuga*, entonces en los d días entre el supuesto punto cero (inicial) de tiempo y el momento deseado deberá completar un número r de revoluciones. Por una regla de tres sencilla tendremos que:

$$r = d\frac{R}{D}.$$

La parte fraccionaria del número real de revoluciones r será la longitud celeste media actual del cuerpo. El valor (d) se conoce como los días acumulados desde el inicio del *kalpa*. Encontrar el valor de los días acumulados (d) requiere conocer algún valor aceptado para el intervalo de tiempo desde el comienzo del *kalpa* y algún momento histórico para la edad actual del universo.

Brahmagupta siguió la convención que consideraba que el inicio del *Kaliyuga* actual había sido hacía 1 972 944 000 años, mientras que Aryabhata lo cifraba en 1 986 120 000 años. Esta elección considerada no ortodoxa de los parámetros de Aryabhata provocó los ataques de Brahmagupta, quien también criticó la rotación axial de la Tierra

«La rotación de la Tierra causa el *naksatra dina* (día sideral).»

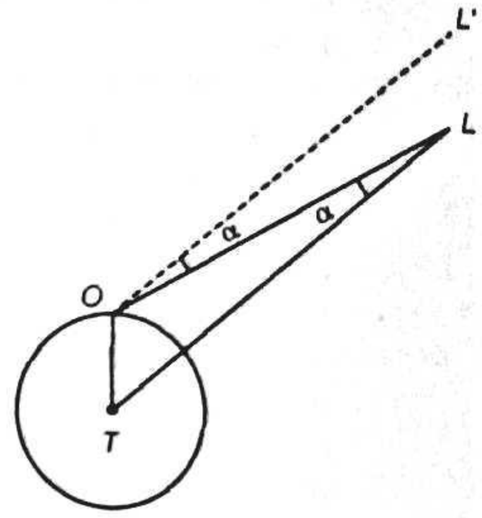
— ARYABHATA EN EL *ARYABHATIYA*, EN *KALAKRIYA-PADA* (CAPÍTULO 3), VERSO 5.

LA ROTACIÓN AXIAL DE LA TIERRA

En el *Aryabhatiya* se afirmaba que: «En un yuga de 4 320 000 años siderales, la Tierra gira hacia el este 1 582 237 500 veces y la Luna 57 753 336 veces [*gitika-pada*, verso 3]. / La Tierra gira un ángulo de un minuto de arco en un *prana* (cuatro segundos siderales)

LA PARALAJE GEOCÉNTRICA

Dos observadores en diferentes lugares de la Tierra ven diferentes imágenes del cielo. Si se desea analizar de forma simultánea las situaciones observadas desde diferentes lugares, es deseable prever un centro común de observación, y el centro de la Tierra parece una elección natural. Por eso, resulta en ocasiones necesario reducir las direcciones observadas de los cuerpos celestes desde un lugar de observación (O) a las direcciones en las que serían captadas por un hipotético observador situado en el centro de la Tierra (T). El ángulo entre la dirección observada de un cuerpo celeste (L) y su dirección geocéntrica se denomina la «paralaje geocéntrica» de ese cuerpo. Las estrellas están a una distancia tan grande de la Tierra que su paralaje geocéntrica es prácticamente nula (T y O se pueden tratar como un mismo punto). Sin embargo, si se consideran objetos que están relativamente cerca, como la Luna o incluso el Sol, no se puede subestimar el radio de la Tierra. En el cálculo de eclipses, aunque el observador está en la superficie terrestre se toma como referencia el centro de la Tierra. Los antiguos astrónomos indios ya se dieron cuenta de la existencia de una marcada desviación en el tiempo observado de la conjunción del Sol y de la Luna (conjunción aparente) y la conjunción calculada. Esta diferencia se puede explicar a través de la imagen. Si L es el centro de la Luna, T el centro de la Tierra y O un observador en la superficie de la Tierra, para este último el centro de la Luna parecerá estar en la dirección OL, mientras que desde el centro de la Tierra la dirección es TL (dirección geocéntrica). La diferencia entre las dos viene dada por el ángulo $OLT = \alpha$. Este ángulo es la paralaje geocéntrica de la Luna para el observador O. Por esta causa, al estudiar las órbitas de la Luna o el Sol en diferentes lugares de la Tierra, se tuvieron que realizar correcciones para la paralaje geocéntrica de estos cuerpos y ganar exactitud.



Paralaje geocéntrica.

[*gitika-pada*, verso 6]. / La rotación de la Tierra causa el *naksatra dina* (día sideral) [*kalakriya-pada*, verso 5]».

Sin embargo, la teoría de la rotación axial de la Tierra no fue aceptada por la mayoría de los astrónomos indios, que plantearon

diversas dificultades para aceptar el giro terrestre: si la Tierra giraba con velocidad tan desmesurada, entonces todos los edificios se habrían desmoronado, la gente no podría haberse detenido, habría habido terremotos constantes, etc.

Brahmagupta en particular fue crítico feroz de esta teoría. Uno de los argumentos que utilizó se puede expresar, usando unidades familiares, de la siguiente manera: «Un cuerpo pesado, al caer de incluso el pico más alto de una montaña, invariablemente cae al pie de la montaña. La circunferencia de la Tierra es de 25 000 millas y la Tierra tarda veinticuatro horas en completar una revolución alrededor de su supuesto eje. La Tierra se mueve a más de 1 000 millas por hora o 16 2/3 millas por minuto. Ahora bien, si un cuerpo pesado tarda treinta segundos en llegar al suelo, durante ese tiempo, la Tierra se ha movido ocho millas. Por lo tanto, ¿cómo puede el cuerpo caer al pie de la montaña?».

En general, tanto en los *siddhantas* como en el *Brahma-sphuta-siddhanta*, después de calcular las longitudes medias para un tiempo dado *d*, estas debían ajustarse para la longitud propia del observador en la Tierra (ya que el observador no tenía por qué estar en el primer meridiano que pasaba por Ujjain y Lanka, como suponía la *Brahma-paksa*). Después se tenían que corregir las posiciones medias para obtener las posiciones verdaderas, pues los planetas no se mueven con movimiento uniforme vistos desde la Tierra. Estas correcciones involucraban combinaciones de círculos, y los algoritmos de cálculo de los mismos dependían en gran medida de los senos que relacionaban medidas lineales y angulares. Habitualmente se presentaban las tablas de veinticuatro senos del primer cuadrante a intervalos de 3º 45' y, a veces, los correspondientes senos junto con una regla para interpolaciones lineales, para encontrar senos y arcos entre valores tabulados.

Una vez obtenidas las posiciones verdaderas de los planetas en relación al centro de la Tierra, se tenía que predecir su apariencia cuando se observaban desde una localización terrestre dada. Obtener la dirección, el lugar y el tiempo constituyó lo que se conoció en los *siddhantas* como las «Tres Preguntas». Brahmagupta empleó diferentes técnicas matemáticas para resolverlas.

LOS ECLIPSES

En el *Brahma-sphuta-siddhanta* también hay una parte dedicada al cálculo de eclipses de Luna y de Sol. Brahmagupta daba una gran importancia a este cálculo, acerca del cual comentó: «los astrónomos buscan el conocimiento del tiempo principalmente con el propósito de entender las *sizigas*», es decir, las situaciones en las que tres —o más— objetos celestes están alineados, como en el caso de los eclipses.

En el capítulo vigésimo cuarto del *Brahma-sphuta-siddhanta* se refiere a las diferencias en nociones fundamentales creadas por los diversos sistemas de astronomía existentes, como el *Surya-siddhanta*, el *Pulisa-siddhanta*, el *Romaka-siddhanta*, el *Vasistha-siddhanta* y el *Yavana-siddhanta*, los cuales, según dice, habían causado anomalías en los cálculos de eclipses.

Esta actitud crítica de Brahmagupta aparece en otros lugares de la obra donde pone de manifiesto sus discrepancias con astrónomos como Srisena, Visnucandra y, claro está, Aryabhata. Lo expresó, a veces, de forma vehemente y casi despectiva: «Aryabhata hace que el apogeo de la Luna se mueva más rápidamente y que el nodo lo haga más lentamente que sus movimientos reales; si sus constantes dan resultados correctos en relación al final del *thitis* (día lunar, conjunción..) o los eclipses, ellos deben considerarse como accidentales, como puedan ser las letras cortadas en madera por gorgojos. Al verme, a quien posee el más preciso conocimiento de los movimientos medios, los hombres que hayan aprendido de los trabajos de Srisena, Visnucandra y Aryabhata no pueden enfrentarse a mí en ninguna reunión como los ciervos al ver un león».

EL *KHANDA-KHADYAKA* DE BRAHMAGUPTA

La segunda obra de Brahmagupta, *Khanda-khadyaka*, fue escrita en 587 de la era *Saka*, que corresponde al año 665, es decir, cuando tenía 67 años. Este segundo texto, un *karana*, se ha conservado

íntegro hasta la actualidad. En sus versos iniciales se indica que las reglas de Aryabhata «son largas y por tanto impracticables para propósitos diarios, como la boda, el nacimiento y similares».

Este manual práctico de astronomía india contiene dos partes, la primera, *Purvakhandakhadyaka*, contiene nueve capítulos, y la segunda, *Uttarakhandakhadyaka*, seis. Es habitual referirse a ellas simplemente como *Purva* y *Uttara*, respectivamente.

En la primera parte (*Purva*), el autor utilizó las constantes astronómicas dadas por Aryabhata en su *Ardharatrika* o sistema de medianoche (tal como se había preservado en el *Mahabhaskariya*, el comentario de Bhaskara I del hoy en día perdido. *Aryabhata siddhanta*, de Aryabhata). Aunque Brahmagupta usó constantes de Aryabhata, formuló reglas menos complicadas.

En la segunda parte (*Uttara*), sugirió sus propios métodos mejorados que constituyeron desarrollos remarcables en el campo de la astronomía india de la época; algunos de ellos ya habían aparecido en el *Brahma-sphuta-siddhanta*.

Brahmagupta no fue un mero teórico. Basó sus cálculos en observaciones directas con la ayuda de instrumentos y dispositivos (*nalikadi yantra*). Defendió que se hiciesen correcciones a partir de las observaciones. Así, en el *Khanda-khadyaka* no solo hizo propuestas teóricas relevantes, como el cálculo de senos utilizando la fórmula de interpolación, sino que puso énfasis en la necesidad de realizar observaciones directas.

CAPÍTULO 6

El legado de las matemáticas indias

La matemática desarrollada en la India, así como algunas de las contribuciones de Brahmagupta, se difundieron tras la muerte de este de una manera desigual, tanto en la propia India como en China y Oriente Medio. Más tarde, la expansión del Imperio árabe hasta la India permitió el contacto con los musulmanes. Con el tiempo, el sistema decimal posicional y las cifras de los numerales indios viajaron y evolucionaron, llegando a Europa, donde se transformarían en nuestros actuales números.

Al-Walid ibn Abd al-Malik (668- 715), conocido como Al-Walid I, fue un califa omeya de Damasco que gobernó entre 705 y 715. Continuó la expansión del Imperio islámico iniciada por su padre, Abd al-Malik, tanto hacia occidente como hacia oriente. En 711, uno de sus generales, Muhammad bin Qasim (695-715), conquistó el Sind y el Punjab, regiones ribereñas del río Indo que en la actualidad forman parte de Pakistán. Sind se convirtió así en el territorio más oriental del califato omeya. La presencia de una colonia musulmana en Sind permitió el desarrollo del comercio y el intercambio cultural, así como la propagación de la religión islámica en algunas partes de la India.

Las obras de Aryabhata, Brahmagupta, Mahavira y Bhaskaracharya llegaron así hasta los astrónomos y matemáticos musulmanes, a partir del siglo VIII. Tales conocimientos incidieron en el naciente imperio califal y jugaron un destacable papel en la matemática árabe, sobre todo a través de las cifras indo-arábigas, que acabarían llegando a Europa a través de la península Ibérica.

EL LEGADO EN LA INDIA

Mahavira y Bhaskaracharya fueron dos matemáticos notables que siguieron en parte la obra de Brahmagupta, la comprendieron y la

ampliaron, desarrollando algunos de sus temas. Mahavira (ca. 850), considerado el matemático indio más importante del siglo IX, se dedicó exclusivamente a las matemáticas y no cultivó la astronomía, a diferencia de sus predecesores. Formó parte de la escuela matemática de Mysore, en el sur de la India. Estaba familiarizado con las matemáticas jainistas, y las cultivó y amplió en el *Ganita-sara-sangraha*, primer tratado matemático independiente de la astronomía que se conserva íntegro y escrito en sánscrito. La obra contiene más de mil cien versos y supone un esfuerzo sin precedentes en la organización del saber matemático de la época. En terminología moderna, contempla operaciones con enteros y fracciones, problemas con ecuaciones de primer grado, regla de tres, problemas sobre interés simple y compuesto, cálculo de áreas de figuras planas (triángulos, cuadriláteros y círculos), cálculo de volúmenes y procedimiento de las sombras.

LAS ENSEÑANZAS DE MAHAVIRA

Después de un primer capítulo introductorio, sin numerar, en el que expone por qué escribe la obra, Mahavira trató los temas que denomina «procedimientos» organizados en ocho capítulos, a pesar de que la mayoría de ellos no se corresponden con los «ocho procedimientos» que enumeraba Brahmagupta en el *Brahma-sphuta-siddhanta*. Los capítulos están formados por versos que contienen reglas y problemas simples (sin las soluciones), con textos ocasionales en prosa que los enlazan.

El capítulo 0, «Capítulo terminológico. Prefacio y términos técnicos», elogia el cálculo (*ganita*) por ser aplicable a todos los campos prácticos y religiosos, incluyendo el amor, el comercio, la música, el teatro, la cocina, la medicina, la construcción, la prosodia, la ornamentación retórica, la poesía, la argumentación lógica, la gramática, la astronomía y la cosmología.

Mahavira presentó diversas unidades para medir las áreas y el tiempo, así como diferentes unidades de peso para grano, oro, plata, hierro u otros metales básicos. La menor de las unidades de medida de espacio y tiempo son «infinitesimales», y muestran

UN PROBLEMA DE MAHAVIRA

Uno de los problemas planteados por Mahavira atañe a las ecuaciones de primer grado. Lo planteó así: «Tres mercaderes encuentran una bolsa en un camino. Uno de ellos dice: "Si me quedo con la bolsa, seré el doble de rico que vosotros dos juntos". "Dame la bolsa y seré el triple de rico", dice el segundo. Mientras que el tercero exclama; "Seré mucho más rico que vosotros dos si me quedo con la bolsa. Me convertiré en cinco veces más rico". ¿Cuánto dinero hay en la bolsa? ¿Cuánto dinero tiene cada mercader?». La resolución empieza estableciendo las relaciones siguientes:

$$m + x = 2\,(y + z)$$
$$m + y = 3\,(x + z)$$
$$m + z = 5\,(x + y),$$

donde m es la cantidad de dinero de la bolsa, y x, y, z son las cantidades de dinero de los diferentes mercaderes. La solución final viene dada en forma de razones, porque no hay un conjunto de soluciones únicas:

$$m:x:y:z = 15:1:3:5$$

Lo que significa que las soluciones están relacionadas entre ellas, esto es, guardan una serie de proporciones. Si damos a x el valor 1, a y el valor 3, a z el valor 5 y a m el valor 15, obtenemos una solución, pero lo mismo pasaría si $x = 2$, $y = 6$, $z = 10$, $m = 30$ y así sucesivamente. El interés de las matemáticas indias por problemas indeterminados, con más de una solución, constituye una característica de las matemáticas indias desde el período védico.

el interés por cuantificar tanto cantidades pequeñas como grandes, en la línea de las matemáticas jainistas. Se considera que la mínima longitud posible es la medida de una cantidad indestructible de sustancia mínima («último átomo»). La cantidad finita más pequeña, el «átomo», se define como un número infinito de estos «últimos átomos», y $8^7 = 2\,097\,152$ átomos constituyen un «dígito».

La menor medida de tiempo, o «instante», es el tiempo requerido por un átomo para pasar a otro átomo, y la menor unidad finita de tiempo se define como un número innumerable de instan-

tes. Por otro lado, todas las unidades de peso son cantidades finitas en metrología ordinaria.

«Un matemático se conoce por ocho cualidades: rapidez, deliberación, refutación, no pereza [diligencia], comprensión, concentración [memoria], inventiva y tener las respuestas.»

— MAHAVIRA EN *GANITA-SARA-SANGRAHA*, CAPÍTULO INTRODUCTORIO.

A continuación se exponen las ocho operaciones aritméticas fundamentales, que no incluyen la suma y la resta (tal vez las consideraba Mahavira demasiado elementales y conocidas). Las seis primeras operaciones incluyen desde la multiplicación hasta la raíz cúbica; las dos últimas incluyen sumas y restas de progresiones o de series. Después se explica la aritmética de las cantidades positivas, negativas y del cero.

EL CORPUS TEÓRICO DEL *GANITA-SARA-SANGRAHA*

El capítulo primero, titulado «Procedimientos de las operaciones», empieza con la descripción de la multiplicación. Las operaciones siguientes: dividir elevar al cuadrado, extraer raíces cuadradas, elevar al cubo y extraer la raíz cúbica, e incluyen los métodos utilizados por Brahmagupta en el *Brahma-sphuta-siddhanta*. Contiene también otras técnicas más sofisticadas con manipulaciones espaciales (de tercer grado).

Capítulo segundo: «Procedimientos de las fracciones». Trata sobre las primeras seis operaciones con fracciones, desde la multiplicación a la raíz cúbica, que se asemejan a las tratadas en textos anteriores. Las operaciones séptima y octava se refieren a sumas y diferencias de series aplicadas a las fracciones. Las primeras cuatro reglas son equivalentes a las de Brahmagupta en el *Brahma-sphuta-siddhanta*; Mahavira añadió algunas más, incluyendo ejemplos para aplicarlas.

Capítulo tercero: «Procedimientos de miscelánea». Consta de una colección de métodos que se podrían emplear para resolver ecuaciones con una incógnita. Organiza las reglas en diez categorías, dependiendo de las características de las cantidades dadas. Así, da reglas para resolver los típicos problemas de repartos con fracciones y fracciones del resto, o bien reglas para resolver ecuaciones con radicales en las incógnitas.

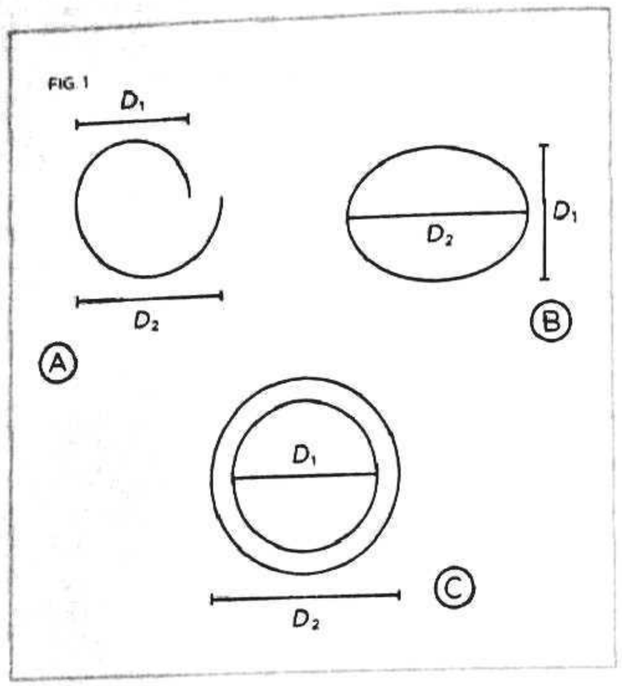
Capítulo cuarto: «Procedimiento de la regla de tres cantidades». Da soluciones para la regla de tres directa e inversa, pero no aporta nada nuevo que no hubieran hecho ya sus predecesores.

Capítulo quinto: «Procedimientos de las mezclas». Contiene otros procedimientos que no incluyen la geometría. Por ejemplo, problemas de intereses simples y compuestos. También permutaciones y diversas técnicas de resolución que incluyen el «pulverizador».

Capítulo sexto: «Procedimientos de las figuras». Al introducir la geometría en este capítulo, se categorizan resultados en aproximados y exactos. Clasifica las figuras en triángulos, cuadriláteros o circulares y entre estas últimas incluye figuras curvas y superficies. Se postula que el resto de las figuras son combinaciones de estas. Además de usar el círculo y el semicírculo, también se utilizan el «círculo largo», el «círculo de concha» y la «rueda-círculo». Estas figuras no están propiamente descritas en el texto, sino que de los términos técnicos y de las áreas o circunferencias de su perímetro se deducen las formas que deben tener. También incluye este capítulo unas reglas similares a las que introdujo Brahmagupta para construir, por ejemplo, triángulos con lados no irracionales.

Capítulo 7: «Procedimientos de excavaciones». Incluye no solo volúmenes sino procedimientos como los utilizados por Brahmagupta en el *Brahma-sphuta-siddhanta* en relación a pilas y aserraduras. La categoría de montones de granos no aparece.

Capítulo 8: «Procedimiento de las sombras». Según Mahavira, el procedimiento de las sombras estaba relacionado con la rama de los *karanas* (manuales de astronomía), porque se utilizaba para medir el tiempo mediante la sombra de un gnomon. Las reglas son aproximaciones simples a la medida del tiempo y proporciones entre triángulos rectángulos parecidas a las usadas en los capítulos de *ganita* o cálculo del *Aryabhatiya* o el *Brahma-sphuta-sidd-*



Círculo de concha (A), círculo largo (B) y rueda-círculo (C).

hanta. No da reglas exactas como las usadas en los tratados *sidd-hantas* de astronomía.

Esta obra es, en cierta manera, una culminación de la matemática jainista y, además, se puede considerar un resumen y ampliación del contenido matemático de las obras de sus predecesores Aryabhata, Bhaskara I y Brahmagupta, para quienes las matemáticas, ya sea en forma de cálculo con números, con incógnitas, con series o con figuras, no dejaban de ser procedimientos al servicio de la astronomía. *Ganita-sara-sangraha* fue una obra muy utilizada en el sur de la India y se la tradujo al telegu, una lengua regional, en el siglo XI.

BHASKARA II

El cuarto matemático del período clásico indio fue Bhaskara II o Bhaskaracharya (el «maestro Bhaskara»), el astrónomo matemático más distinguido de la escuela de Ujjain. Posiblemente se trate del primer matemático indio inmortalizado en un monumento.

Este personaje nació en 1114 en Bijjada Bida, localidad que hoy es conocida como Bijapur, en el estado indio de Karnataka. Bhaskaracharya murió en el año 1185, en Ujjain. Su padre fue un *brahman* llamado Mahesvara, célebre como astrónomo y matemático. Con el tiempo, Bhaskara se convertiría en jefe del observatorio astronómico en Ujjain, el principal centro científico de la India en su tiempo.

Bhaskara II consiguió un conocimiento de los sistemas de numeración y de la resolución de ecuaciones que no se alcanzaría en Europa hasta varios siglos después. Descubrió el doble signo de los radicales cuadráticos y el carácter anormal de los mismos

PROBLEMAS DE BHASKARACHARYA

Bhaskara II presentó dos problemas parecidos, que se resuelven con procedimientos de ecuaciones de segundo grado, uno del *Lilavati* y el otro de *Bija-ganita*. Tiene interés comentarlos porque en uno Bhaskara II solo admite una solución y, en cambio, en el otro dos. El primer problema pertenece al *Lilavati*: «De un enjambre de abejas, un número igual a la raíz cuadrada de la mitad de su número total se fue a libar en flores de loto. Poco después, 8/9 del total del enjambre se fue al mismo lugar. Un zángano engañado por la fragancia de la flor de loto se introdujo en ella. Pero cuando estaba en su interior, cayó la noche, se cerró el loto y la abeja quedó atrapada dentro. A su zumbido, su consorte respondió ansiosamente desde el exterior ¡Mi querida niña! ¿Cuántas abejas hay en el enjambre?». La solución de Bhaskara II es equivalente a resolver la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\frac{1}{2}x} + \frac{8}{9}x + 2 = x,$$

donde x es el número total de abejas del enjambre. Debe suponerse que el zángano y su consorte son miembros del enjambre que no fueron con el mismo grupo inicial ni con el segundo, de ahí el 2 que se añade en la ecuación. Si se considera como incógnita raíz de x y se hace el cambio de variable

$$x = 2z^2,$$

se obtiene

$$z + \frac{8}{9}2z^2 + 2 = 2z^2,$$

y eliminando el denominador y agrupando términos se obtiene la ecuación:

$$2z^2 - 9z - 18 = 0,$$

cuyas soluciones son 6 y –3/2. Con la solución 6 se obtiene la x igual a 72, que es la solución que da Bhaskara II. La que surge de –3/2 no da un número entero, y seguramente por esto solo admite la solución 72. En cambio, en el problema siguiente (perteneciente al *Bija-ganita*), Bhaskara II admitió que es válida más de una solución: «En un bosque, un número de monos igual al cuadrado de la octava parte de los monos totales de una manada están jugando ruidosamente. Los doce monos restantes, que están en una actitud seria, están en una colina cercana y se irritan con los gritos que vienen del bosque. ¿Cuál es el número total de monos de la manada?». En este caso, si x es el número de monos, se debe resolver la ecuación:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x.$$

A diferencia de la ecuación del problema anterior, las dos soluciones $x = 16$ y $x = 48$ son igualmente admisibles, según Bhaskara II.

«Triunfador es el ilustre Bhaskaracharya cuyas hazañas reverencian los sabios e instruidos. Poeta dotado de fama y merecimientos religiosos es como la cresta de un pavo real.»

— Inscripción en un templo medieval de Maharashtra referida a Bhaskaracharya.

cuando el radicando es negativo. En su obra *Bija-ganita* apareció por primera vez el intento de resolver la división por cero, con indicación de que se trata de una cantidad infinita. Es famoso por tres obras: *Lilavati*, *Bija-ganita* y *Siddhantha-siromani*, que a veces se describen como cuatro atendiendo a las dos partes de *Siddhantha-siromani: Gola-dhyaya*, «Globo celestial», y *Graha-ganita*, «Matemáticas de los planetas».

EL *LILAVATI*

El *Lilavati* —literalmente, «hermoso» o «juguetón»— es un tratado de aritmética en el que Bhaskara II mostró un amplio conocimiento y comprensión de las obras de Brahamagupta y Aryabhata. Según sus traductores al persa, el autor dedicó el libro a su hija, que tenía este nombre, después de un episodio ocurrido en torno a la fecha en la que debía casarse. Al hacerle el horóscopo, Bhaskara descubrió que el tiempo favorable para su boda debía ser una determinada hora de un cierto día. Dispuso de una clepsidra para medir la hora (un recipiente lleno de agua con un agujerito en el fondo y diversas marcas graduadas que indican las horas a medida que el recipiente se vacía). Cuando todo estaba preparado y el recipiente lleno, Lilavati, curiosa por ver cómo transcurría el tiempo, se inclinó sobre la vasija y una perla de su vestido cayó dentro, tapando el agujero por donde debía salir el líquido. La hora feliz pasó sin que nadie la percibiese, y se cuenta que Bhaskara, como compensación, dedicó el libro a su hija.

El texto se presenta de forma similar al capítulo 12 (*ganita*) del *Brahma-sphuṭa-siddhanta* de Brahmagupta, en forma de versos; pero Bhaskara II introdujo texto en prosa para identificar cada tema por separado.

Como era habitual, el primer verso es una invocación a la deidad Ganesa, deidad protectora de los comienzos y removedora de los obstáculos.

Los versos 2 a 11 tratan sobre metrología y unidades decimales. No hizo Bhaskara una descripción tan exhaustiva como Mahavira, sino que indicó las principales unidades de monedas, peso, longitud, áreas y volúmenes. Sus unidades llegan hasta poder escribir 10^{17}.

Versos 12 a 47: ocho operaciones con enteros, fracciones y el cero. Las ocho operaciones son las habituales: adición, sustracción, multiplicación y siguientes hasta la raíz cúbica. La sección relativa a las fracciones empieza con reducción a común denominador, fracciones de fracciones, enteros aumentados o disminuidos por fracciones, etc.

Versos 48 a 55: inversión y método de la cantidad asumida.

Versos 56 a 72: algoritmos pseudo-algebraicos. Contiene las reglas básicas que usaba Brahmagupta en el capítulo 18 del *Brahma-sphuṭa-siddhanta*. Cita las «seis reglas»: las seis operaciones elementales con álgebra que Brahmagupta introdujo en el verso 35 del capítulo 18 del *Brahma-sphuṭa-siddhanta*. Aquí se trata de buscar soluciones racionales para x e y que satisfagan la ecuación

$$x^2 \pm y^2 - 1 = z^2$$

para z entero o fracción.

Versos 73 a 89: regla de tres y variaciones. Trata sobre la regla de tres directa e inversa, y sobre intercambios y trueques.

Versos 90 al 117: cantidades mixtas. Trata sobre los ocho procedimientos básicos en el orden típico: mezclas, series, figuras, excavaciones, pilas, aserrado y montones.

Versos 118 a 134: series. Aparecen fórmulas para sumar los n primeros enteros, cuadrados y cubos, así como reglas para sumar progresiones aritméticas y geométricas.

Versos 135 a 198: geometría del triángulo y del cuadrilátero. Repite la fórmula de Heron/Brahmagupta para el área del triángulo y el cuadrilátero, pero indica que en el caso del cuadrilátero es aproximada. Todo parece indicar que tanto Mahavira como Bashkara II criticaron a Brahmagupta por no explicitar que su fórmu-

la del área del cuadrilátero solo era exacta para el caso de los cuadriláteros cíclicos.

Versos 199 a 213: geometría de círculos, esferas y cuerdas. Aquí, Bhaskara utilizó la razón «precisa» entre circunferencia y diámetro como $3\,927/1\,250$, esto es $\pi = 3{,}1416$, y la razón «práctica» como $22/7$, esto es $\pi = 3{,}142857143\ldots$ También dio reglas para calcular el área de un círculo y la superficie y el volumen de la esfera.

Versos 214 a 240: excavaciones, pilas, aserraduras, montones y sombras. *Lilavati* acaba con un resumen de los cinco procedimientos tradicionales, incluyendo problemas simples.

Verso 241: sobre la regla de tres cantidades. Al final de la sección correspondiente a las sombras incluye una digresión acerca de la función fundamental de la regla de tres cantidades en matemáticas. Puede leerse: «Cualquier cosa que se calcula en álgebra o aquí (en aritmética) con un multiplicador y un divisor por aquellos de clara inteligencia es justo una regla de tres cantidades. Pero para aumentar la inteligencia de los obtusos, se explica mediante diversas reglas más sencillas».

Versos 242 a 260: el pulverizador. Las reglas habituales ya vistas en el capítulo 18 del *Brahma-sphuta-siddhanta* de Brahmagupta para ecuaciones indeterminadas, esto es, la utilización de las divisiones o fragmentaciones sucesivas y el retorno a la ecuación inicial.

Versos 261 a 271: red de dígitos. Se introduce este nombre para tratar problemas sobre combinaciones y permutaciones. También lo ilustra con problemas.

A lo largo de toda la obra, el autor se expresó en tercera persona, que se correspondía con un trato de formalidad en la época (elegante y serio).

EL *BIJA-GANITA*

La segunda obra que comentaremos de Bhaskara es el *Bija-ganita*, literalmente «cálculo de semillas», un texto más avanzado que el *Lilavati*, y del que se han acumulado menos copias manuscritas y menos comentarios (y, por tanto, menos lectores). También parece ser que ha acumulado menos rivales, ya que es el primer tratado independiente de álgebra de la tradición india. Igual que el *Lilavati*, está escrito en versos divididos en temas o secciones, pero también se introdujeron comentarios en prosa.

Sección 1: se titula *Las seis operaciones con cantidades positivas y negativas*. Después de una primera salutación en el verso 1 se hace una breve introducción de la obra en el verso 2, donde se dice que «explicaré con detalle las operaciones del álgebra».

Sección 2: *Las seis operaciones con el cero*. En las reglas de la aritmética con el cero hay una asociación explícita de la división por cero con el infinito que no aparecía en el *Lilavati*.

Sección 3: *Las seis operaciones con incógnitas*. Las incógnitas se representan con nombres de colores, que se manipulan aritméticamente según unas reglas explícitas.

Sección 4: *Las seis operaciones con karanis o números sordos* (un número sordo es el que no puede ser simplificado por extracción de raíz cuadrada o superior, por ejemplo $\sqrt{2}$). Aquí Bhaskara II dio todas las reglas para operar con *karanis* (irracionales) de forma similar a como había hecho en la sección anterior con el tratamiento de las incógnitas.

Sección 5: *El pulverizador*. La mayoría de las reglas de esta sección son para ecuaciones lineales indeterminadas y la mayoría de problemas son repetidos del *Lilavati*.

Sección 6: *Naturaleza cuadrada*. Esta corta sección de siete versos da las mismas reglas básicas para ecuaciones indeterminadas que había expuesto Brahmagupta en el *Brahma-sphuta-siddhanta* (capítulo 18). Por ejemplo, encontrar x, y enteros que satisfagan la ecuación $Nx^2 + k = y^2$ para N y k enteros.

Sección 7: *El método cíclico (para problemas de naturaleza cuadrada)*. El *Bija-ganita* es el primer texto conservado en el que se presenta la famosa «solución cíclica» para resolver la ecuación $Nx^2 + 1 = y^2$. El método se basa en que, si se conocen soluciones a, b para una ecuación auxiliar $Na^2 + k = b^2$, donde la constante k puede ser ± 1, ± 2 o ± 4, entonces se puede encontrar una solución de x, y en la ecuación $Nx^2 + k = y^2$. Las reglas para encontrar las soluciones se empezaron a establecer en algunos casos ya en el capítulo 18 del *Brahma-sphuta-siddhanta* de Brahmagupta, pero aquí se amplían. Este método fue redescubierto

en Occidente (1657) por William Brouncker (1620-1684), matemático inglés.

Sección 8: *Ecuaciones con una incógnita*. En esta parte se incluyen problemas simples, algunos de los cuales son idénticos a los que utilizaba para ilustrar métodos aritméticos del *Lilavati*. Tal vez pone en práctica lo que había enunciado en el verso 2, lo no manifiesto (álgebra) es la fuente de lo manifiesto (aritmética); son diferentes aproximaciones a los mismos problemas.

Sección 9: *Eliminación del término del medio* (ecuaciones cuadráticas). Bhaskara II mencionó aquí claramente las dos soluciones de las dos raíces cuadradas que darán lugar a las dos soluciones de las ecuaciones cuadráticas.

Sección 10: *Ecuaciones con más de una incógnita*. Las ecuaciones lineales con más de una incógnita se resuelven expresando las soluciones como relaciones entre las incógnitas, esto es, las soluciones se expresan en función de una de las incógnitas que hace de parámetro. Cuando hay más incógnitas que ecuaciones, se usa el método del pulverizador.

Sección 11: *Eliminación del término del medio con más de una incógnita*. Una ecuación cuadrática única con más de una incógnita se debe convertir, si es posible, en un problema de naturaleza cuadrada, y debe ser resuelto por los métodos usados para las ecuaciones indeterminadas.

Sección 12: *Productos de incógnitas*. Para resolver estas ecuaciones con incógnitas que se multiplican entre ellas, Bhaskara II utilizó los métodos usados por Brahmagupta.

Sección 13: *Conclusiones*. Estos últimos versos contienen información sobre los conocimientos que tenía Bhaskara II y sus diferentes trabajos.

EL *SIDDHANTA-SIROMANI*

La tercera obra por la que se hizo famoso Bhaskara II es *Siddhanta-siromani*. Este trabajo, literalmente «joya de la cresta de los *siddhantas*», fue compuesto cuando Bhaskara tenía treinta y seis años. A veces se considera que *Siddhanta-siromani* incluye el *Lilavati* y el *Bija-ganita*, además de dos secciones propias de astronomía; sin embargo, puesto que los textos relativos a la aritmética (*Lilavati*) y al álgebra (*Bijaganita*) tienen nombre propio y fueron copiados como textos independientes, seguiremos la tradición de considerar *Siddhanta-siromani* como un texto separado, dedicado a la astronomía.

Este tratado está dividido en dos partes: la primera *graha*, relacionada con los planetas, presenta algoritmos para calcular posiciones medias, posiciones reales, eclipses de Luna y de Sol y temas de este orden. La segunda, *gola*, contiene capítulos dedicados al elogio de la esfera, la forma de la esfera, la esfera de la Tierra, explicaciones y varios temas relacionados con *ganita* (cálculo), instrumentos, una descripción poética de las estaciones, y cuestiones para evaluar el conocimiento de los alumnos.

En esta obra, Bhaskara II demostró tener un amplio conocimiento de la trigonometría, incluidas la tabla de senos y la relación entre las diferentes funciones trigonométricas.

El autor consiguió fama y reconocimiento extraordinarios ya en su época. En 1207 se fundó en la India una institución educativa dedicada a estudiar sus escritos matemáticos y astronómicos.

TRANSMISIÓN A ORIENTE MEDIO Y CHINA

Seguramente fueron los viajeros y los contactos comerciales los agentes responsables de que se difundieran los conocimientos matemáticos surgidos en la India a otras zonas de Asia. Incluso llegaron a Irán y Siria. A partir de las pocas fuentes fragmentarias que se conocen sobre la astronomía y la astrología de Irán anteriores a su islamización, se ha deducido que estas disciplinas tuvieron una importante influencia de trabajos escritos en sánscrito. Por otro lado, el culto obispo sirio Severus Sebokht (575-667) jugó un importante papel en la transmisión a su país de conceptos indios. En el año 662 aludió a los valiosos métodos de cálculo de los indios: «No voy a hablar de la ciencia de los hindúes, un pueblo que no es el mismo que los sirios, o de sus

sutiles descubrimientos en astronomía, descubrimientos que son más ingeniosos que los de los griegos y los babilonios, o sus métodos de cálculo de alto valor y sus cálculos, que superan la descripción».

En el caso de China, tres prominentes familias indias de expertos astrónomos se establecieron en aquel reino durante la dinastía Tang. Gautama Siddha o Jutan Xida (su nombre en chino, a veces también transcrito Chut'an Hsita) pertenecía a uno de aquellos linajes. Familiarizado con los sistemas astronómicos chino e indio, llegó a dirigir la oficina astronómica de Changa'n, la capital de la dinastía. Se le encomendó la tarea de escribir un compendio sobre astrología: el *Datang Kaiyuan Zhanjing* (*El gran tratado Tang sobre astrología de la era Kaiyuan*). En este tratado compiló trabajos astronómicos diversos y en su contenido estuvo trabajando entre los años 718 y 728.

«Solo quiero decir que sus cálculos se realizan a través de nueve signos.»

— **Severus Sebokht.**

Uno de sus capítulos, que es de hecho un *karana*, se denominó en chino *Jiuzhili* (a veces transcrito como *Chiuchih-li*) o método *Navagraha* de hacer el calendario. El *Jiuzhili* o método Navagraha contenía cálculos astronómicos indios. Al principio, Gautama explicó el sistema de notación decimal empleado en las operaciones aritméticas en la India en aquella época; escribió símbolos para los números del uno al nueve y también el cero; introdujo la división del círculo en 360 grados frente a los más de 365 del sistema chino, así como el cálculo de la paralaje para calcular eclipses solares; y propuso algoritmos para la elaboración del calendario y la predicción de los eclipses lunares y solares. Se considera que este trabajo introdujo oficialmente las funciones trigonométricas en China. El texto sigue la doctrina de la escuela *Ardharatrika-paksa*. El método introducido por Gautama derivaba del *Panchasiddhantika* de Varahamihira y del *Khanda-khadyaka* de Brahmagupta.

EL PERÍODO O ERA KAIYUAN EN CHINA (713-741)

La era Kaiyuan es un período de la historia de China transcurrido bajo el mandato del sexto emperador de la dinastía Tan, Xuanzong (685-762). Fue una época caracterizada por una gran estabilidad política, paz social y también prosperidad económica, lo cual favoreció avances en la educación, la literatura, la música y las artes. En particular, la primera parte del reinado de Xuanzong (713-741) es considerada como el momento de mayor desarrollo de la dinastía Tang, un período excepcionalmente creativo y productivo. Fue entonces cuando el astrónomo indio Gautama Siddha (o Jutan Xida, según la traducción fonética de su nombre en chino) llegó a ser un alto funcionario de la oficina astronómica de Chang'an. Gautama Siddha incluyó métodos de cálculo astronómico y calendarios indios en un capítulo (*Jiuzhili*) de su gran tratado sobre astrología de la era Kaiyuan. El método se basaba en obras de autores como Varahamihira y Brahmagupta.

El emperador Xuanzong, retratado en un detalle de *Los ocho inmortales*, pintura de Ren Renfa (1254-1327).

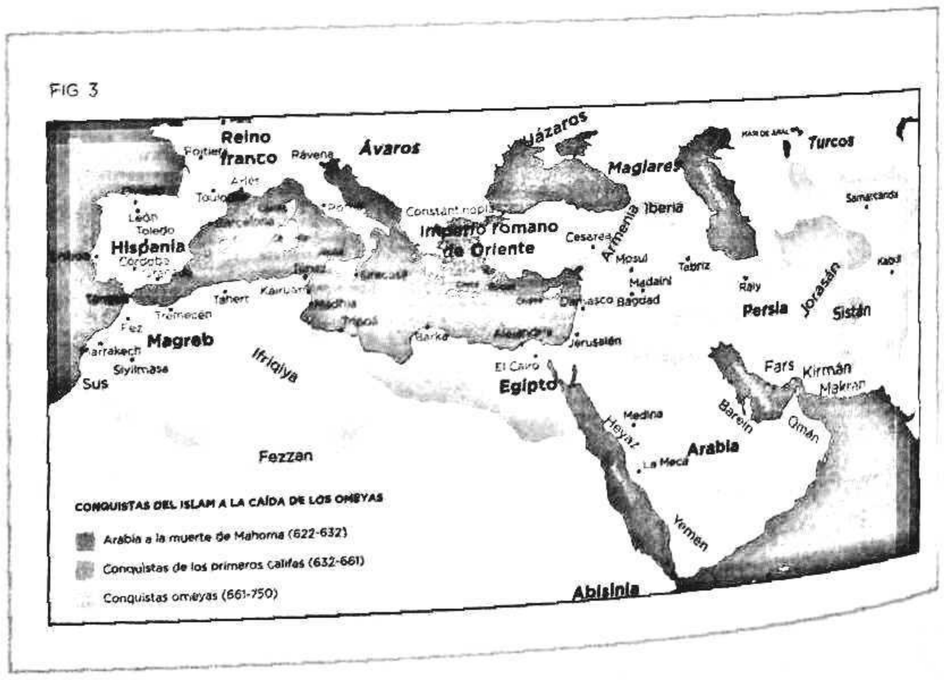
TRANSMISIÓN A LA CULTURA ÁRABE

La importancia del sistema indio fue reconocida por algunos viajeros árabes que visitaron China durante la dinastía Tang. Soleiman al-Tajir (Soleimán el comerciante), un mercader musulmán del siglo IX, natural de Siraf (en el moderno Irán), viajó a la India y a China y escribió un relato de sus viajes alrededor del año 850. Y dejó constancia de su impresión de que la astronomía india era más avanzada que la china: «los chinos [...] tienen algunas nociones de astronomía; pero en esto los indios superan a los chinos».

En el año 750 se fundó el tercer califato islámico, o califato abasí, que sucedió a la dinastía de los omeyas y duró hasta 1258. En 762 cambió su capital a Bagdad, y por eso también se le conoce como el califato de Bagdad. En la segunda mitad del siglo VIII, una delegación de la India llegó al nuevo califato de Bagdad con un *siddhanta* perteneciente a la escuela de Brahmagupta que los eruditos de la corte del califa tradujeron y adaptaron al árabe.

El historiador egipcio Ibn al Qifti (1172-1248) escribió una historia sobre los eruditos (*Tarikh al-Hukama*) que, aunque es de finales del siglo XII, cita fuentes mucho más tempranas y, en relación al siglo VIII, escribe: «[...] una persona de la India se presentó ante el califa al-Mansur en el año [776 d.C.,] era muy versado en el método de cálculo *siddhanta* relacionado con el movimiento de los cuerpos celestes, y que tenía formas de calcular ecuaciones basadas en las medias cuerdas [esencialmente el seno] calculadas en medios-grados [...]. Todo esto está contenido en una obra [...] de la cual afirmó haber tomado la media cuerda calculada para un minuto. Al-Mansur ordenó que este libro fuera traducido al árabe, y que se escribiese una obra basada en la traducción para dar a los musulmanes una base sólida para calcular los movimientos de los planetas». El historiador de las matemáticas Georges Ifrah cree que lo más probable es que la obra fuese el *Brahma-sphuta-siddhanta* de Brahmagupta.

Fases de expansión del Imperio islámico.



Hay un astrónomo indio, Kanaka, que es desconocido para las fuentes indias pero que aparece en la tradición bibliográfica árabe como Kanak al-Hindi. Se dice que fue miembro de la embajada enviada desde Sind a Bagdad para preparar el *Zij al-Sindhind* (la traducción del *Brahma-sphuta-siddhanta* de Brahmagupta).

Las primeras traducciones del sánscrito inspiraron otros trabajos astronómicos y astrológicos en árabe, algunos de los cuales incluso imitaron la práctica india de escribir tratados de carácter técnico en verso. Desgraciadamente, estas obras se han perdido y solamente las conocemos por fragmentos dispersos o por alusiones a los mismos de trabajos posteriores, pero indican que la astronomía árabe emergente adoptó muchos parámetros de los modelos cosmológicos indios, así como sus técnicas de cálculo, incluyendo el uso de senos. Sin embargo, la influencia de la astronomía de inspiración sánscrita pronto fue desplazada por los textos astronómicos y matemáticos griegos, que seguramente debieron parecer más comprensibles por sus exposiciones más deductivas y, además, por estar escritos en prosa.

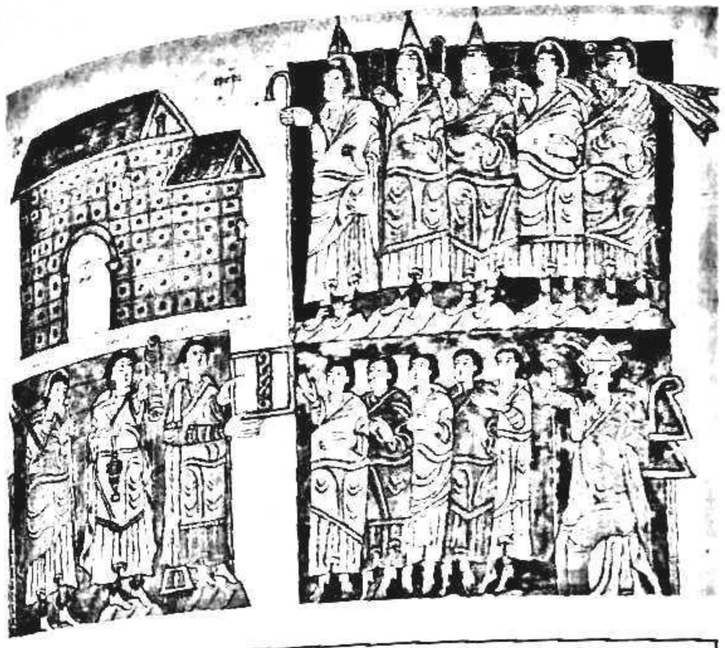
De todas maneras, el «cálculo indio», es decir, la aritmética basada en el sistema de numeración posicional, mantuvo su condición de herramienta matemática crucial y el álgebra árabe seguramente fue influenciada por las técnicas indias de cálculo con incógnitas, aunque las conexiones no están claras. En general, el álgebra islámica no admite números negativos, como sería de esperar en una tradición algebraica de inspiración india, tal como hizo Brahmagupta, quien discutió las relaciones entre cantidades positivas y negativas. Muchas técnicas de cálculo en tratados árabes, como la regla de tres o los algoritmos iterativos, deben estar conectadas con fuentes indias, pero, hasta ahora, estas conexiones no se han podido determinar de una forma clara. Los matemáticos musulmanes se identificaron, finalmente, con la metodología y filosofía de las matemáticas griegas, que tomaron como modelo y, en general, fueron menos receptivos a otros enfoques distintos. El erudito al-Biruni, a caballo entre el siglo X y XI, fue un ejemplo de ello.

LA CONTRIBUCIÓN DE AL-BIRUNI

Al-Biruni (973-1048) fue un matemático, astrónomo, físico, filósofo, viajero, historiador y farmacéutico persa, uno de los intelectuales más destacados del mundo islámico. En la segunda mitad de su vida, al-Biruni se interesó cada vez más por la cultura india. Al parecer, ese aprecio pudo ser consecuencia de haber acompañado al sultán Mahmud de Gazni (971-1030) en varias expediciones a la India. Sus estudios dieron como resultado una obra maestra, *Kitab Tarik al-Hind* (literalmente, *Historia de India*). Esta obra, concluida en 1030, es un trabajo muy amplio que abarca aspectos muy diversos del país. Al-Biruni describió la religión y la filosofía de la India, su sistema de castas y costumbres, estudió los sistemas indios de escritura y numeración, así como los sistemas de pesos y medidas, y examinó la geografía del país. También indagó sobre la astronomía, la astrología y el calendario indios. Precisamente por ser el autor de este libro, se ha considerado que al-Biruni es el primer «indólogo» en el sentido moderno de la palabra.

Al-Biruni estudió la literatura india en el idioma original, traduciendo varios textos sánscritos al árabe. También escribió varios tratados dedicados a ciertos aspectos de la astronomía y las matemáticas indias que le interesaban especialmente.

Debido a que conocía bien la ciencia griega, al-Biruni pudo comparar la astronomía griega e india y hacer comentarios evaluativos. Este ilustre científico mostró, sin embargo, un exceso de celo respecto de las matemáticas que él conocía en comparación con las matemáticas indias. Así, refiriéndose a los indios cultos decía: «Comencé a mostrar los elementos sobre los que descansa esta ciencia [la matemática], a señalarles algunas reglas de deducción lógica y los métodos científicos de todas las matemáticas, y luego se reunieron alrededor de mí desde todas partes, preguntándome, y muy ansiosos por aprender de mí». Al-Biruni decía que solo podía comparar los escritos indios que conocía sobre matemática astronómica «con una mezcla de perlas y estiércol, o de costosos cristales y guijarros comunes. Ambos tipos de cosas son iguales ante sus ojos, ya que no pueden elevarse a los métodos de una deducción estrictamente científica».



FOTOS SUPERIOR Y CENTRAL: El *Códice albeldense*, también conocido como *Códice vigilano*, data del siglo X y comprende diversos contenidos históricos, jurídicos y canónicos. Es, al parecer, el primer manuscrito conservado en el que aparecen cifras indoarábigas en Europa.

FOTO INFERIOR: Leonardo de Pisa, más conocido como *Fibonacci*, fue un matemático italiano que permaneció activo entre los siglos XII y XIII. Gran viajero, conoció el sistema de numeración indoarábiga, que estudió en profundidad, consciente de sus ventajas.

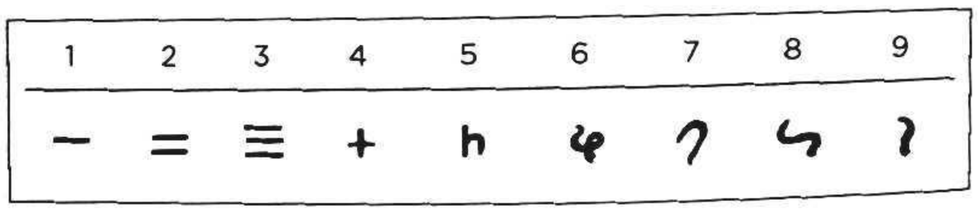
El astrónomo indio al que se refirió con más frecuencia fue Brahmagupta. Incluso afirmó que tenía la intención de traducir el *Brahma-sphuṭa-siddhanta* al árabe. Sin embargo, como no pudo completarlo, proporcionó una tabla de sus contenidos.

EVOLUCIÓN DE LA NUMERACIÓN INDIA HASTA EL SISTEMA DE NUMERACIÓN MODERNA

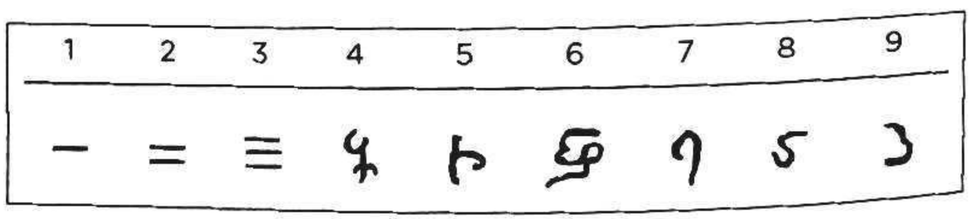
Los números *Brahmi* se han encontrado en inscripciones en cuevas y monedas en regiones cerca de Poona, Bombay y Uttar Pradesh (India). La datación de estos números indica que estaban en uso durante un largo período de tiempo hasta el siglo IV d.C. Por supuesto, diferentes inscripciones difieren algo en el estilo de los símbolos.

El período gupta es aquel durante el cual la dinastía homónima gobernó sobre el actual estado de Magadha, en el noreste de la India, y esto fue desde principios del siglo IV a finales del siglo VI d.C. Los numerales gupta se desarrollaron a partir de los números *Brahmi* y se difundieron sobre áreas extensas del imperio.

Los números gupta evolucionaron en los números de Nagari, llamados a veces los números de Devanagari. Esta forma evolucionó a partir de los numerales gupta, alrededor del siglo VII, y siguió desarrollándose a partir del siglo XI en adelante. El nombre literalmente significa la «escritura de los dioses» y fue considerada la más bella de todas las formas que evolucionaron. He aquí un



Numerales *Brahmi*, aproximadamente s. I a.C.



Numerales gupta, aproximadamente s. IV.

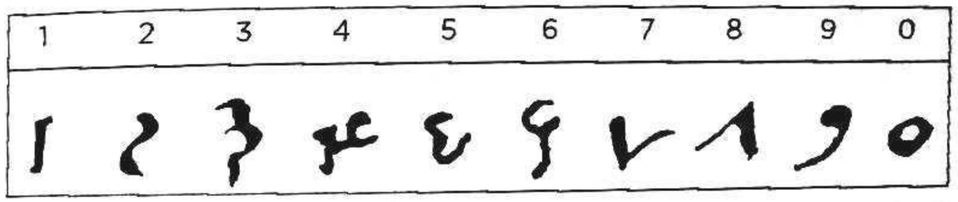
LA TRANSMISIÓN DE LOS NUMERALES INDOARÁBIGOS A EUROPA

La grafía de los números modernos y el sistema de numeración decimal posicional, arábigo o indoarábigo, tuvo su origen en la

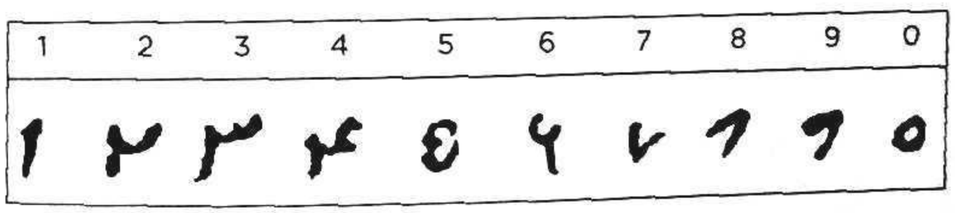
ejemplo de una forma temprana de los números indios que se utilizan en la parte oriental del Imperio islámico. Eso viene de una obra de al-Sijzi (ca. 945-ca. 1020), no una obra original de él, sino más bien el trabajo de otro matemático que al-Sijzi copió en Shiraz y fechó su copia en 969.

Los números habían cambiado un poco su forma cien años más tarde, como muestra esta copia de uno de los textos astronómicos de al-Biruni. Estos son los números que aparecen en la copia de 1082.

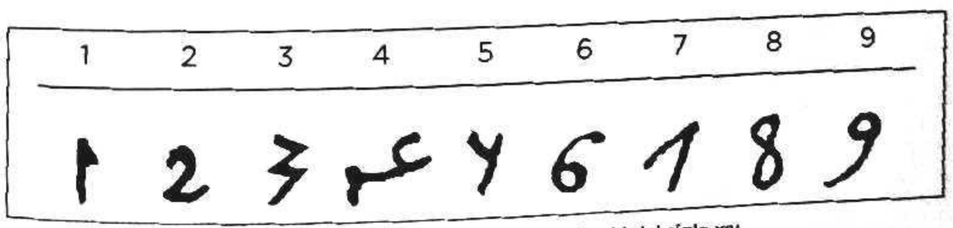
La forma de los números en el oeste del Imperio árabe parece más familiar a la numeración moderna actual, y no se trata de ninguna sorpresa, ya que es a partir de estos números que el sistema numérico indio llegó a Europa.



Los números del tratado de al-Sizji de 969.



Los números del tratado de al-Biruni copiado en 1082.



La forma de los números en un texto de Al-Banna al-Marrakushi del siglo XIV.

India. Su origen se remonta a las cifras *brahmi*, que aparecieron entre los siglos III a.C. y II d.C. Tras un largo periplo de muchos siglos, las cifras pasaron y evolucionaron por territorios musulmanes viajando hacia Oriente Medio y el Mediterráneo, donde llegaron, inicialmente, a los territorios del norte de África y al-Andalus, para consolidarse finalmente en Europa en el siglo XV. Naturalmente, según la época y el territorio hubo una interrelación de las cifras *brahmi*, o de sus evoluciones posteriores, con sistemas de numeración locales.

«En Bugia me introdujeron en el arte [la técnica] de los nueve símbolos de los indios [...] muy pronto el conocimiento del arte me gustó por encima de todo y llegué a entenderlo.»

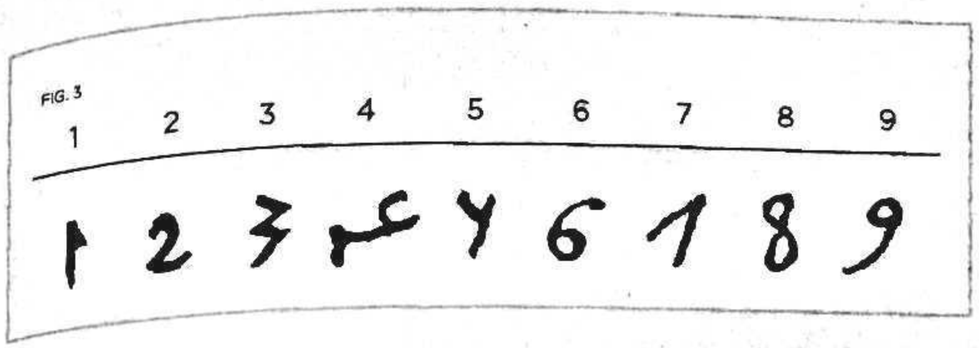
— LEONARDO DE PISA (FIBONACCI), EN EL *LIBER ABACI* (1202).

La forma de las cifras utilizadas en el oeste del Imperio árabe resultan más familiares en relación a los números habituales utilizados hoy en día. Esto no es ninguna sorpresa, ya que fue a partir de estos números que el sistema numérico indio llegó a Europa.

LAS CIFRAS DE AL-BANNA

El matemático y astrónomo magrebí Ibn-al-Banna al-Murrakushi (ca.1256-ca. 1321), cuyo nombre (Ibn-al-Banna) significa «el hijo del arquitecto», era, según algunos autores, natural de Granada, aunque este dato no se ha podido contrastar. Estudió en Fez y Marrakesh, donde aprendió diversas ramas de las matemáticas. Más tarde enseñó en Marrakesh y Aghmat, escribió diversos tratados y se hizo famoso por sus conocimientos. En un libro sobre aritmética práctica escrito a principios del siglo XIV, dio la forma de los números que se pueden ver en la figura 3.

Sin embargo, mucho antes de la época de al-Banna existió el que parece ser el primer documento conservado donde aparecen las cifras indoarábigas en Europa. Se trata del *Códice albeldense* o *Códice vigilano*, que se encuentra en el monasterio de San Martín



Numerales de Ibn-al-Banna al-Murrakushi

de Albelda, en La Rioja (España). Este manuscrito fue copiado por un monje en el año 976 y muestra las cifras indoarábigas del 1 al 9.

Entre el *Códice Vigiliano* del siglo X y los numerales de al-Banna (siglo XIV) hubo otras contribuciones al conocimiento y utilización de las cifras indoarábigas. Entre ellas destaca la del mercader y matemático italiano Leonardo de Pisa (Fibonacci, ca. 1170-ca. 1250), quien fue un apasionado de las cifras indoarábigas. Las difundió en su obra *Liber Abaci* (1202). Su interés despertó de niño, desde que tuvo conocimiento de ellas trabajando con su padre en Bugía (Argelia).

Así pues, la llegada a Europa de los nuevos numerales que se habían originado en la India y su aceptación no fue un proceso rápido. Sin embargo, una vez ya aceptados, en el siglo XV, la matemática europea inició un rápido desarrollo.

Lecturas recomendadas

Aczel, A., *En busca del cero. La odisea de un matemático para revelar el origen de los números*, Vilassar de Dalt, Ediciones de Intervención Cultural/Biblioteca Buridán, 2015.

Bhaskara Acharya, *Lilavati. Matemática en verso del siglo xii*, Madrid, Real Sociedad Matemática Española/Ediciones SM, 2015.

Boyer, C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 1992.

Ifrah, G., *Historia universal de las cifras*, Madrid, Espasa Calpe, 1997.

Joseph, G. G., *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Madrid, Editorial Pirámide, 1996.

Launay, M., *La gran novela de las matemáticas*, Barcelona, Paidós, 2017.

Moreno, R., *Aryabhata, Brahmagupta y Bhaskara, Tres matemáticos de la India*, Madrid, Nívola, 2011.

Pickover, C. A., *El libro de las matemáticas*, Madrid, Ilus Books, 2011.

Stewart, I., *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años*, Barcelona, Crítica, 2008.

Índice

al-Biruni 11, 147,148, 151
al-Juarismi 7, 150
al-Mansur 11, 146
álgebra 9, 20 32, 34, 52, 59, 62, 66, 71, 74, 139-143, 147
Apastamba 21, 23, 24
Ardharatrika-paksa 120, 121, 144,
Arya-paksa 120, 121
Aryabhata 7-10, 13, 41-43, 45, 46, 48-51, 54-58, 62, 63, 69, 70, 72, 102, 104, 109, 117, 119-122, 124, 127, 128, 131, 136

Baudhayana 23, 24
Bhaskara
I 7, 13, 40, 44-46, 48, 49, 58, 77, 102, 121, 122, 128, 136, 137
II (Bhaskaracharya) 7, 10, 11, 13, 121, 122, 136-138, 141-143
Bija-ganita 137, 138, 140, 141, 143
Brahma-paksa 10, 13, 109, 120-122, 126
Brahma-sphuta-siddhanta 9-11, 13, 56, 59, 61, 64, 70-72, 74, 76, 80, 87, 89, 90, 91, 102, 104, 106, 121, 122, 126-128, 132, 134, 135, 138-141, 147, 150
Brouncker, William 142

calendario 10, 35, 39, 47, 71, 72, 111, 144, 145, 148
círculo 24, 42, 44, 47, 51, 89, 90, 96-98, 100, 102, 114, 115, 118-120, 126, 132, 136, 140, 144
códice
albeldense 149, 152
vigilano 149, 152
cuadrilátero cíclico 9, 91, 92, 96

dvaparayuga 58

eclipse 10, 36, 48, 49, 61, 62, 106, 109, 119, 122, 123, 125, 127, 143, 144
ecuación
algebraica 9, 52
de Pell 9, 81
de primer grado 9, 44, 51, 54, 73, 76, 77, 82, 83, 132, 135, 139, 143

de segundo grado (cuadrática) 9, 10, 27, 51, 62, 72, 73, 76-79, 137, 139, 142
diofántica 9, 53, 54
indeterminada 32, 34, 40, 59, 62, 71,73, 80, 81, 84, 85, 140, 142
Elementos 43
época clásica 37, 39, 40
Euclides 7, 43
Euler, Leonhard 7, 71

fórmula
de Brahmagupta 9, 92, 93
de Herón 34, 90, 139
de interpolación 87, 89, 105-107, 128

ganita 13, 59, 62, 63, 71, 97, 132, 135, 139, 143
ganita-pada 43, 51, 117,
Ganita-sara-sangraha 132, 134, 136
Gauss, Carl Friedrich 7, 71
Gautama Siddha 10, 144, 145
gitika-pada 43, 49, 119, 124, 125
gnomon 44, 66, 71, 135
gola-pada 43, 119
graha 123, 143

Harappa 15, 17-20, 25, 33
hinduismo 10, 25, 30, 41, 116, 120
Herón de Alejandría 7, 8, 34, 56

Ibn al Qifti 146
Ifrah, Georges 146, 155
Imperio gupta 13, 37, 41, 55

jainismo 18, 27, 30
Jishnugupta 56
Jiŭzhāng Suànshù 56
Jiuzhili 144, 145
jya 99, 101, 117
kalakriya-pada 43, 118, 124, 125
kaliyuga 58, 101, 116, 117, 121, 124
kalpa 22, 101, 116, 117, 121, 124
karana 32, 61, 101, 127, 135, 144
karanis 75, 97, 141
Katyayana 21, 23, 24
Khanda-khadyaka 9, 10, 13, 58, 61, 87, 89, 101, 102, 105, 106, 123, 127, 129, 144
Kuttaka 9, 53, 54, 59, 71, 72, 73, 75, 76, 78, 80, 97

Lanka 119, 120, 126
Latadeva 40, 46
Leonardo de Pisa (Fibonacci) 11, 149, 152, 153
Liber abaci 11, 152, 153
Lilavati 13, 137, 138, 140-143, 155

Mahavira 7, 10, 13, 30, 131-135, 139
mahayuga 51, 58, 116, 117, 119, 121
Manava 23, 24
manuscrito de Bakshali 31
manvatara 116, 117
Mohenjo-Daro 17-20
Muhammad bin Qasim 131

naksatra dina 114, 124, 125
navagraha 123, 144
Newton, Isaac 7, 10, 105, 106
notación decimal posicional 63
numerales
al-Banna al-Marrakushi 151
Brahmi 150
Bakhshali 26
de al-Biruni 51
de al-Sijzi 151
Gupta 150
Gwalior 26
Nagari 150
números negativos 147

Pailamaha-siddhanta 113, 115, 116, 120, 121
Panchasiddhantika 13, 35, 46, 111, 113, 144
Panini 20, 23
paralaje geocéntrica 125
Paulisa-siddhanta 35, 36, 46
Ptolomeo, Claudio 7, 8, 36, 40, 56, 57
Purvakhandakhadyaka 128

qiuyishu 72, 73

raíz
cuadrada 21, 24, 29, 34, 45, 52, 64, 74, 75, 90, 93, 137, 141
cúbica 63, 64, 134, 139
rasi 44, 113, 118
Romaka-siddhanta 35, 46, 127
rotación de la Tierra 51, 62, 101, 106, 117, 124, 125

satyayuga 58
Saura-paksa 121
Sebokht, Severus 143, 144
Siddhanta-siromani 122, 142, 143
Sind 131, 147
sistema epicíclico 46, 47
Stirling, James 10, 105, 106
sulbasutras 8, 15, 20, 21, 24, 32, 34
Surya-siddhanta 35, 46, 127

teorema de Brahmagupta 9, 94-96
tretayuga 58
trigonometría 10, 36, 40, 48, 71, 87, 89, 98, 99, 100, 143

Ujjain 13, 39, 46, 56, 120, 126, 136
Uttarakhandakhadyaka 128

Varahamihira 7, 10, 13, 35, 40, 41, 46-48, 56, 58, 111, 144, 145
Vasishtha-siddhanta 35
Vedanga Jyotisha 35, 39, 113

Yavana-siddhanta 127
Yuga 58, 116, 117, 119, 120, 123, 124

Xuanzong 145

Zij al-Sindhind 147